DENOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter des objets.

I.Ensemble fini : introduction

1)Un ensemble qu'on peut dénombrer ses éléments est dit un ensemble fini et Le nombre d'éléments distincts d'un ensemble E est appelé le cardinal de E, on le note : Card(E)=n

Dans le cas contraire, on dit qu'il est infini.

2) L'ensemble vide, noté $\varnothing$ est un ensemble de cardinal 0 : $card\varnothing=0$

3)Soit un A ensemble Si $cardA=n$ et $n\in\mathbb{N}^*$ alors il existe une bijection entre A et l'ensemble $\{1;2;3;...;n\}$ donc on peut écrire l'ensemble A sous forme : $A=\{x_1;x_2;x_3;...;x_n\}$

4)Soient A et B deux ensembles finis $cardA=cardB$ si et seulement si il existe une bijection entre A et B

Propositions : Soient E et F deux ensembles finis

1) $card(E\cup F)=card(E)+card(F)-card(E\cap F)$

2) Si E et F sont disjoints $(E\cap F=\varnothing)$ alors :

$card(E\cup F)=card(E)+card(F)$

Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une famille d'ensembles disjoints deux a deux ($(X_i\cap X_j=\varnothing)$ si $(i\neq j)$) alors :

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{i=n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n}card(X_i)$$

3)Si $E\subseteq F$ alors : $card(E)\le card(F)$ et

$card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

II. Théorème fondamental du dénombrement

Si un événement C_1 peut se produire de n_1 façons différentes

et un événement C_2 peut se produire de n_2 façons différentes et …. et un événement C_p peut se produire de n_p façons différentes

et Tous ces événements étant indépendants,

Alors :Le total n des possibilités de l'événement combiné C_1 , C_2 ; … C_p est le produit des possibilités de chaque événement. Cad : $n_1\times n_2\times n_3...\times n_p$

Propositions : Soient A et B deux ensembles finis et non vides : $card(A\times B)=cardA\times cardB$

III.le nombre d'applications d'un ensemble dans un autre

Soient M et N deux ensembles finis et non vides.

L'ensemble des applications de N dans M est :

$(cardM)^{cardN}=m^n$ avec : $cardM=m$ et $cardN=n$

IV.L'ensembles de tous les parties d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et non vide et $cardE)=n$ $n\in\mathbb{N}$ et soit $P(E)$ l'ensembles des parties de E on a :

$cardP(E)=2^n$

V.Arrangements

1)Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E C'est-à-dire : un élément de la forme :

$(x_1;x_2;...;x_p)\in E\times E\times...\times E=E^p$

et dans la notion d'arrangement l'ordre des éléments importe et on distinguera :

- Les arrangements **avec répétitions**
- Les arrangements **sans répétitions**

2)Arrangements avec répétitions

2-1 Définition : Soit E un ensemble fini de Cardinal n.

Un arrangement avec répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E non nécessairement distincts. On utilise également le terme de p-liste d'éléments de E .

2-2 Nombre d'arrangements avec répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p .

3)Arrangements sans répétitions

3-1 Définition : Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Un arrangement sans répétitions de p éléments de E est un arrangement de p éléments de E tous distincts.

3-2 Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note : A_n^p et est égal à :

$A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-p+1)$

VI.Permutations

1)permutations sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n\in\mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E **sans répétitions** et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n! (*factorielle n*)** défini par

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$

2)permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont Identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec $n_1+n_2+...+n_k=n$ et $n_i \geq 1$, on a :

$$P_n=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times ...\times n_k!}$$ (P_n permutations avec répétitions)

VII. Combinaisons

1 Définition : Soit E un ensemble non vide de n éléments (n $\neq$ 0) :

Et un entier p : $0 \leq p \leq n$

On appelle combinaison de p éléments d'un ensemble fini E de n éléments, tout sous-ensemble A de p éléments de E.

Remarque :« combinaison » est donc synonyme de sous-ensemble et aussi de partie.

(Ce sont les façons de choisir p éléments parmi n éléments

2 Propriété : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que $0 \leq p \leq n$ on a :

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p et on a :

$$C_n^p=\frac{A_n^p}{p!}$$ et on a aussi : $$C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$C_n^0=1$; $C_n^1=n$; $C_n^n=1$

- Le nombre de combinaisons de 0 éléments parmi n éléments est :

$C_n^0=1$ (L'ensemble vide)

- Le nombre de combinaisons de 1 éléments parmi n éléments est : $C_n^1=n$ (les singletons)
- Le nombre de combinaisons de n éléments parmi n éléments de E est : $C_n^n=1$ (L'ensemble E)

Synthèse :

Récapitulons les différentes questions que l'on doit se poser confronté à un problème de dénombrement. Cela nous permettra de savoir choisir le concept à utiliser en fonction de la situation.

1)L'ordre des éléments est-il important ?

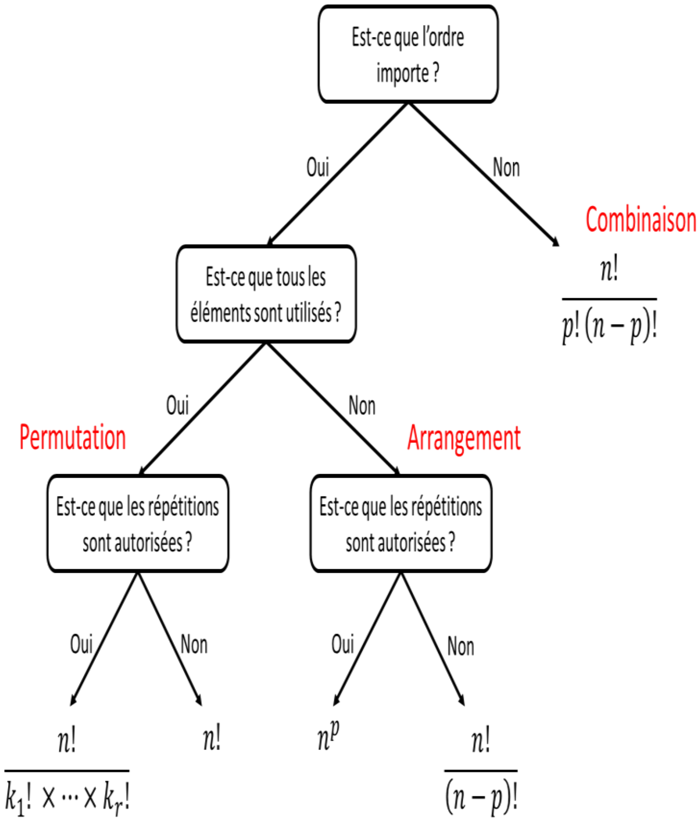
- Si oui il s'agit d'arrangements ou de permutations.
- Si non il s'agit de combinaisons.

2)Si l'ordre importe, est-ce que tous les éléments sont utilisés ?

- Si non il s'agit d'arrangements.
- Si oui il s'agit de permutations.

3)Les répétitions sont-elles ou non autorisées ?

Nous pouvons représenter par un arbre de décision ces différentes alternatives.



3) Propriétés : Quels que soient les entiers naturels n et p tes que $0 \leq p \leq n$ on a :

1) $C_n^p=C_n^{n-p}$ 2) $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

Preuve :1)on a $C_n^p=\frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_n^{n-p}=\frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!}=\frac{n!}{(n-p)!p!}=C_n^p$$

2) Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in E$

Le nombre de combinaisons de E de p éléments est la somme des combinaisons de E de p éléments qui contiennent a qui ne contiennent pas a

Donc : $C_n^p=C_{n-1}^p+C_{n-1}^{p-1}$

Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

VIII.Formule du binôme de Newton

Proposition : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+....+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^nb^n$$