

Droites et plans de l'espace

Droites de l'espace

- Soient A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} soient colinéaires.
- Si \mathcal{D} est une droite de vecteur directeur $\vec{u} (\neq \vec{0})$ et \mathcal{D}' est une droite de vecteur directeur $\vec{u}' (\neq \vec{0})$:
 - \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires.
 - \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont orthogonales si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux.

Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soient A(x_A, y_A, z_A) un point de l'espace et $\vec{u}(a, b, c)$ un vecteur non nul de l'espace. La droite passant par A de vecteur directeur \vec{u} admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, l'ensemble des points de l'espace de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \alpha + ta \\ y = \beta + tb \\ z = \gamma + tc \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ où l'un au moins des trois réels α, β ou γ est non nul est la droite passant par le point A(α, β, γ) et de vecteur directeur $\vec{u}(a, b, c)$.

Plans de l'espace

Equation cartésienne d'un plan défini par un point et un vecteur normal

- Un **vecteur normal** à un plan \mathcal{P} est un vecteur **non nul** orthogonal à toute droite de \mathcal{P} . Deux vecteurs normaux à un même plan \mathcal{P} sont colinéaires.
- Soient A un point de l'espace et \vec{n} un vecteur non nul de l'espace. Le plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} est l'ensemble des points M de l'espace tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

- Si dans un repère orthonormal le point A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et le vecteur \vec{n} a pour coordonnées (a, b, c) (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul), une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal \vec{n} est

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

- Dans un repère orthonormal, tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul. Réciproquement, l'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ où l'un des trois réels a, b ou c n'est pas nul est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$.

Parallélisme et perpendicularité de deux plans ou d'un plan et d'une droite

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{P}' est un plan de vecteur normal \vec{n}' .

- \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires.
- \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux.

\mathcal{P} est un plan de vecteur normal \vec{n} et \mathcal{D} est une droite de vecteur directeur \vec{u} .

- \mathcal{P} et \mathcal{D} sont parallèles si et seulement si \vec{n} et \vec{u} sont orthogonaux.
 - \mathcal{P} et \mathcal{D} sont perpendiculaires si et seulement si \vec{n} et \vec{u} sont colinéaires.
 - \mathcal{P} et \mathcal{D} sont perpendiculaires si et seulement si \vec{u} est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan \mathcal{P} .
- Dans ce cas, \mathcal{D} est orthogonale à toute droite contenue dans \mathcal{P} .

Distance d'un point à un plan


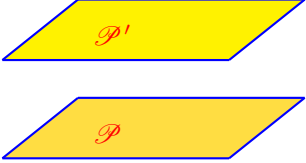
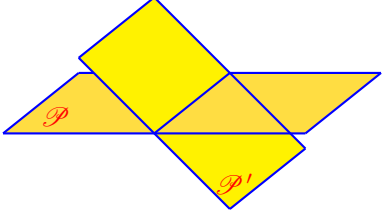
Soient \mathcal{P} un plan et M_0 un point. La distance de M_0 au plan \mathcal{P} est la distance de M_0 au projeté orthogonal H du point M_0 sur le plan \mathcal{P} . Cette distance est la plus courte distance de M_0 à un point quelconque de \mathcal{P} .

Si dans un repère orthonormal le plan \mathcal{P} a pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (l'un des trois réels a, b ou c n'étant pas nul) et M_0 a pour coordonnées (x_0, y_0, z_0) alors la distance de M_0 à \mathcal{P} est


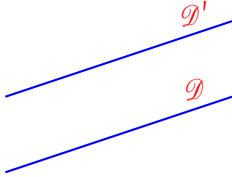
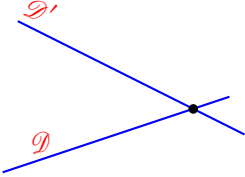
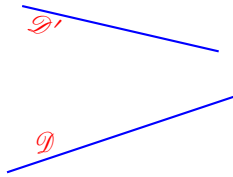
$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Positions relatives de droites et de plans

Deux plans

| Plans parallèles | | Plans non parallèles |
|---|---|---|
| confondus | strictement parallèles | sécants en une droite |
|  |  |  |



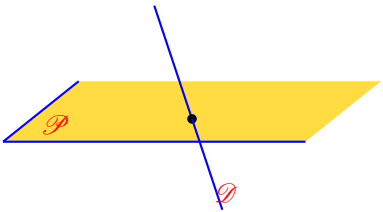
Deux droites

| Droites parallèles | | Droites non parallèles | |
|---|---|--|---|
| confondues | strictement parallèles | sécantes | non coplanaires |
|  |  |  |  |
| coplanaires | | | non coplanaires |

En particulier,

- si D et D' n'ont aucun point en commun, D et D' peuvent être strictement parallèles ou non coplanaires,
- si D et D' ne sont pas parallèles, D et D' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

Une droite et un plan

| Plans et droites parallèles | | Plans et droites non parallèles |
|---|---|---|
| droite incluse | strictement parallèles | sécants en un point |
|  |  |  |

Dans cette fiche, on n'a pas rappelé la notion de demi-espace ($ax + by + cz + d > 0$) ni les positions relatives de trois plans de l'espace.