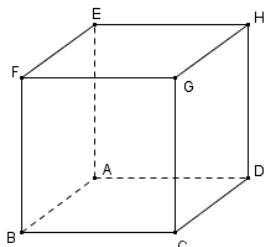


VECTEURS DE L'ESPACE

Exercice01 :



ABCDEFGH un cube on pose :
Simplifier :
 $\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH}$
Solution :
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}$$
 Car

$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$$

Exercice02:

ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que : $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que : $(ML) \parallel (DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles

On a : $\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$$\text{donc : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \right) \quad (1)$$

D'autre part On a : $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK}$ et
 $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CD}$ Donc : $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FK} - \overrightarrow{CD}$
et puisque : K milieu du segment $[EF]$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} \text{ donc : } \overrightarrow{FK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \text{ (car : } \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{CD})$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{CF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$$

donc \overrightarrow{DK} et \overrightarrow{ML} sont colinéaires

Donc : $(ML) \parallel (DK)$

Exercice03: \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels x et y tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

$$\text{Solution : } x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$$

$$(x+y-2)\vec{u} + (2x+3y-5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x+3y-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2 \\ 2x+3y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Exercice04 :

ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$

on pose $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{IO} = \vec{w}$

Montrer que : \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment $[AD]$

et O milieu du segment $[FD]$

$$\text{on trouve : } \overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} \text{ Donc : } \overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AK}$$

et puisque : K milieu du segment $[AF]$

$$\text{cad } \overrightarrow{AK} = \vec{w}$$

et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\vec{v} = \overrightarrow{AL}$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{AC} = \vec{u} \text{ et } \vec{v} = \overrightarrow{AL} \text{ et } \overrightarrow{AK} = \vec{w}$$

Donc : \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

Exercice05 : ABCDEFGH un cube

M milieu du segment $[HE]$ et N milieu du segment $[HG]$

Les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{AC} sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{MN}$

et puisque $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$ donc

Les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et par

suite Les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires

Exercice06 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

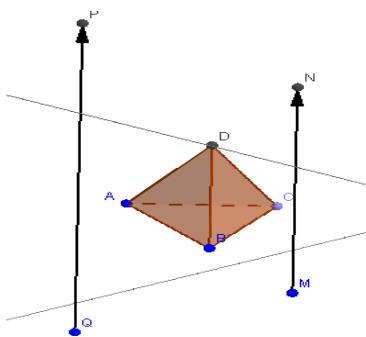
1) Tracer une figure

2) Ecrire \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} en fonction de \overrightarrow{BD}

3) En déduire que \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



$$2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{PQ} = -3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -3\overrightarrow{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ on trouve : } \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

donc : \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

4) on a \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice07 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit

de montrer que \overrightarrow{LD} , \overrightarrow{EK} sont colinéaires ??

$$\text{On a : } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ on utilisant la Relation de Chasles}$$

Chasles

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et puisque : } \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ on déduit que : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$$

$$\text{donc : } (LD) \parallel (EK)$$

Exercice08 : ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport à H

Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

$$\text{Solution : on a : } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$$

donc : Les vecteurs \overrightarrow{AK} , \overrightarrow{CB} et \overrightarrow{CG} sont coplanaires

on déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

$$\text{donc : } (AK) \parallel (BCG)$$