

VECTEURS DE L'ESPACE

I) Vecteur de l'espace

1) si A, B sont deux points dans l'espace \mathcal{E}

Si A et B sont distinctes alors ils forment un vecteur noté : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

Si A et B sont confondues alors : $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$ (vecteur nul)

2) Remarques :

a) Si O un point dans l'espace \mathcal{E} alors pour tout vecteur \vec{u} de l'espace il existe un point unique M dans l'espace \mathcal{E} tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

b) L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3

c) Un vecteur non nul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

Sa direction : c'est la direction de la droite (AB)

Son sens : de A à B

Sa norme : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

d) Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ssi $ABNM$ est un parallélogramme

e) Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont colinéaires

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de V_3 ;

Soient les points $O : A ; B$

tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OD}$ tel que : $OBDC$ est un parallélogramme

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

Propriété : L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3 \forall \vec{w} \in V_3$

$$1) \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad 2) (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ 4) Tout vecteur \vec{u} de V_3 admet un

opposé noté $-\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

donc : $(V_3, +)$ est un groupe commutatif.

Et on a donc : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Si \vec{u} est non nul on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que

$$\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$$

Le vecteur $\vec{v} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur \vec{u}

on pose pour tout k dans \mathbb{R} : $k\vec{0} = \vec{0}$ et $0\vec{u} = \vec{0}$

on a : $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$

Propriété : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad 1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$3) 1\vec{u} = \vec{u} \quad 4) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

on dit que : $(V_3, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

Remarque :

$\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall \vec{v} \in V_3$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$; $\forall \beta \in \mathbb{R}$

$$1) \alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$$

$$3) \alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$$

III) VECTEURS COLINEAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$

Propriété : Si on a : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ avec

$a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

2) Droite vectorielle

Définition : Soit \vec{u} un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur \vec{u} s'appelle : la droite vectorielle

engendrée par le vecteur \vec{u} et se note $\Delta_{\vec{u}}$

$$\Delta_{\vec{u}} = \left\{ \vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u} \right\}$$

$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires

Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires

$$\text{alors } \Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient \vec{u} un vecteur non nul et A un point de l'espace affine \mathcal{E} . L'ensemble des points M dans l'espace \mathcal{E} qui vérifient $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ où k est un réel s'appelle la droite qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u} . On la

$$\text{note par } D(A; \vec{u}) : D(A; \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \right\}$$

Remarque :

- Le couple (A, \vec{u}) détermine un repère sur la droite $D(A; \vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec \vec{u} est aussi vecteur Directeur de la droite $D(A; \vec{u})$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et A un point l'espace on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. On dit que : les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ssi les points A, B, C et D sont coplanaires.

Propriété : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs dans l'espace vectoriel. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement s'il existent deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Remarque : si \vec{u} , \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurs \vec{w} et \vec{v} sont coplanaires.

2) Plan vectoriel

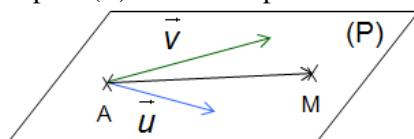
Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs \vec{w} dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par \vec{u} , \vec{v} .

3) Détermination vectoriel d'un plan.

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace. L'ensemble des points M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs \vec{u} , \vec{v} , on le note par : $P(A; \vec{u}, \vec{v})$.

$$P(A; \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in \mathcal{E} / \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}\}$$

Le triplet $R(A; \vec{u}, \vec{v})$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R .



V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs et A et B deux points de l'espace

$$1) D(A; \vec{u}) \parallel D(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

2) A et B et C et D des points tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D(A; \vec{u})$ et le plan $P(B; \vec{v}, \vec{w})$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

$$D(A; \vec{u}) \parallel P(B; \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $Q(B; \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles si et seulement si \vec{u} , \vec{v} et \vec{u}' sont coplanaires et \vec{u} , \vec{v} et \vec{v}' sont coplanaires aussi

Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien