



## I. Vecteurs de l'espace :

### **01.** Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace :

#### a. notion de vecteur dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ):

dans le plan un vecteur  $\vec{AB}$  est défini par :

- ↗ Direction de  $\vec{AB}$  : c'est la droite  $(AB)$ .
- ↗ Sens de  $\vec{AB}$  : c'est le sens de A vers B .
- ↗ La norme de  $\vec{AB}$  ( ou la longueur de  $\vec{AB}$  ) .est la distance AB on note :  $AB = \|\vec{AB}\|$  .
- ↗ Cette notion sera prolongée à l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) .

#### b. Exemple :

- I est le milieu de  $[AB]$  est équivaut à  $\vec{AB} = 2\vec{AI}$ .
- Soient A et B et C trois points non alignés de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) donc A et B et C détermine un plan et un seul noté  $(ABC)$  .
- Dans le plan  $(ABC)$  , on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de  $[EF]$  et  $[EG]$  donc on peut déduire que  $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{FG}$  et aussi les droites  $(IJ) \parallel (FG)$ .

#### c. Remarque :

- Le cas  $A = B$  le vecteur  $\vec{AA} = \vec{0}$  ( le vecteur nul ) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle.
- On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme.
- Un quadrilatère ABCD dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est un parallélogramme si et seulement si  $\vec{AB} = \vec{DC}$ .

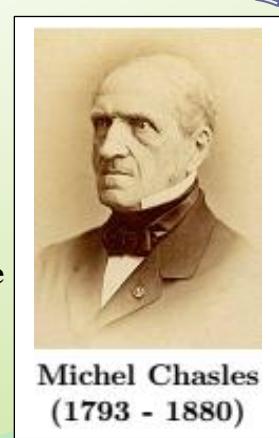
### **02.** Calculs vectoriels dans l'espace :

#### a. Remarque :

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

Par exemple :

- $-\vec{AB} = \vec{BA}$ .
- Relation de Chasles  $\forall A, B, C \in (\mathcal{E}) : \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$  .
- L'opposé du vecteur  $\vec{u}$  est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens  $\vec{u}$  et on note  $-\vec{u}$  .
- Le vecteur  $\vec{v} = k\vec{u}$  :
  - $\vec{v} = k\vec{u}$  a la même direction que  $\vec{u}$  .
  - $\vec{v} = k\vec{u}$  a le même sens que  $\vec{u}$  si  $k > 0$  .  $\vec{v} = k\vec{u}$  a le sens opposé que  $\vec{u}$  si  $k < 0$  .



Michel Chasles  
(1793 - 1880)



- La norme de  $\vec{v} = k\vec{u}$  vérifie  $\|\vec{v}\| = |k|\|\vec{u}\|$ .

- Pour tout vecteur  $\vec{u}$  on pose  $0.\vec{u} = \vec{0}$ .
- Pour tout  $k \in \mathbb{R}$  on a  $k.\vec{0} = \vec{0}$ .

#### d. Propriétés :

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et pour tous réels  $k$  et  $k'$  on a :

- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$ .
- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ .
- $k(k'\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$ .
- $1.\vec{u} = \vec{u}$ .
- $k.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \vec{0})$ .

## III. Colinéarité de deux vecteurs – définition vectoriel d'une droite dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) .

### 01. Colinéarité de deux vecteurs – Colinéarité de trois points :

#### a. Définition :

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement s'il existe un  $\alpha$  de  $\mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \alpha\vec{v}$  ou  $\vec{v} = \alpha\vec{u}$ . ( c.à.d. l'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre ).

#### b. Remarque :

- Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace .
- $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$  sont colinéaires si et seulement si  $(AB) \parallel (CD)$  .
- A et B et C trois points de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) sont alignés si et seulement si  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

### 02. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) :

#### a. Définition et propriété :

Soient A et B deux points distincts de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

- Tout vecteur non nul  $\vec{u}$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) colinéaire avec le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est appelé vecteur directeur de la droite ( $AB$ ).
- L'ensemble des points M de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$  tel que  $\alpha$  de  $\mathbb{R}$  est la droite ( $D$ ) qui passe par le point A et de vecteur directeur  $\vec{u}$ , on note  $D(A, \vec{u})$

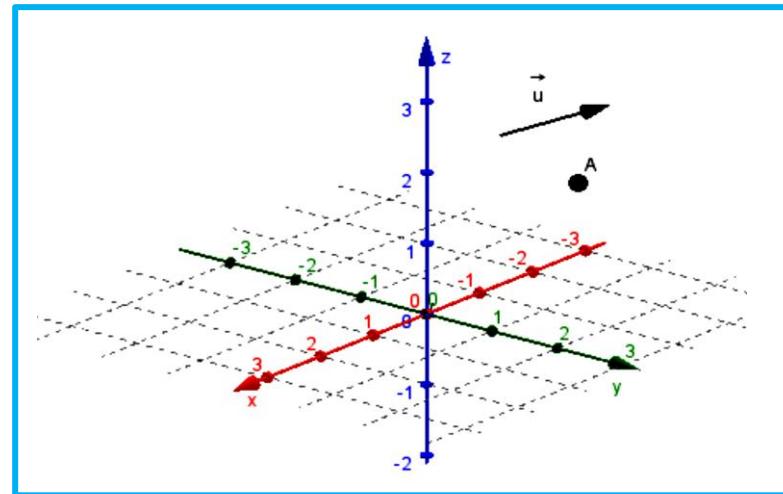
$$\text{d'où : } D(A, \vec{u}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



**b. Exemple :**

Soit A un point et  $\vec{u}$  est un vecteur non nul de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) ( voir figure ci contre ).

Construire la droite  $D(A, \vec{u})$ .



**III. Vecteurs coplanaires – détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :**

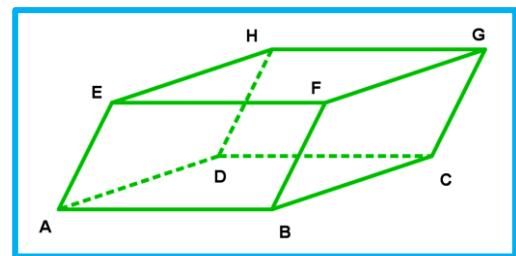
**O1. Vecteurs coplanaires :**

**a. Définition et théorème :**

- Quatre points A et B et C et D de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan .
- Trois vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$  .

**b. Exemple :**

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires .



**Correction :**

- On considère les vecteurs :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$ .  
On a :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$  et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires .
- les vecteurs :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$  sont non coplanaires .

**c. Remarque :**

- Si parmi les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires .
- Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires .  
**Exemple**  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$  sont coplanaires car  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$  sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par A et B et E et F .



## 02. Détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :

### a. Définition et théorème :

- Tout plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) est déterminé par un point donné de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) et de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non coplanaires de ( $\mathcal{E}$ ).
- Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont appelés vecteurs directeurs du plan, ce plan sera noté  $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$ .
- L'ensemble des points  $M$  de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) qui vérifient  $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  tel que  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}$  est le plan  $(P)$  qui passe par le point  $A$  et orienter par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , on note  $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
- d'où :  $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}; x \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$ .

### b. Remarque :

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres.
- $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires si et seulement si  $\exists x, y \in \mathbb{R} / \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ .

### Exemple :

- ❖  $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{AD}$  (  $\overrightarrow{AB}$  s'écrit en fonction de  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{BD}$  )
- ❖  $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{BD}$  (  $\overrightarrow{BC}$  s'écrit en fonction de  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$  )
- Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

### c. Exercice :

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace ( $\mathcal{E}$ ) tel que :

$$(1) : 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}.$$

1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires.

**Correction :**

On a :

$$(1) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4\overrightarrow{EB} - 5\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{EA} + 4(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}) - 5(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}) - (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$$

D'où :  $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$  donc le vecteur  $\overrightarrow{AD}$  est écrit en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$ .

Donc les vecteurs :  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires.

D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

**Conclusion :** les points A et B et C et D sont coplanaires.



#### IV. Parallélisme dans l'espace :

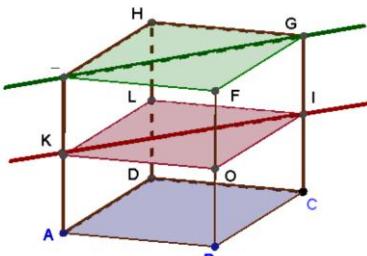
##### 01. Parallélisme des droites dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ):

a. Définition :

$D(A, \vec{u})$  et  $\Delta(B, \vec{v})$  sont deux droites de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

$\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}) \text{ ou encore } \Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u}; \alpha \in \mathbb{R}^*$ .

b. Exemple :



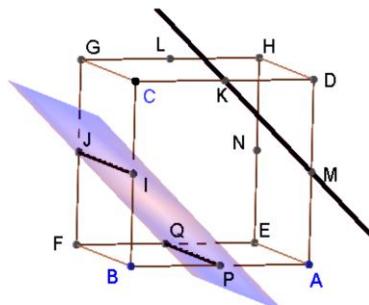
##### 02. Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ):

a. Définition :

$D(A, \vec{u})$  et  $P(B, \vec{v}, \vec{w})$  sont une droite et un plan de l'espace ( $\mathcal{E}$ ).

la droite  $D(A, \vec{u})$  est parallèle au plan  $P(B, \vec{v}, \vec{w})$  si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ou encore  $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R}$ .

b. Exemple :





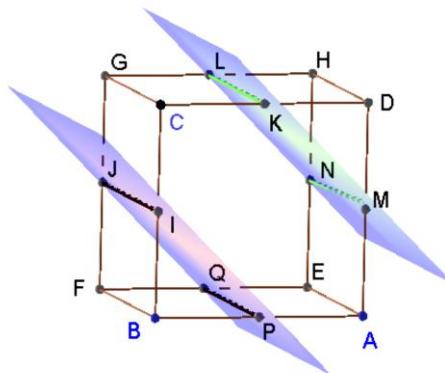
### 03. Parallélisme de deux plans dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ):

#### a. Définition :

$P(B, \vec{v}, \vec{w})$  et  $Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$  sont deux plans parallèles dans l'espace ( $\mathcal{E}$ ) si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{u}_1$  et  $\vec{v}_1$  sont coplanaires ou encore.

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow (\vec{u}_1 = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u}_2 = x'\vec{v} + y'\vec{w} / x', y' \in \mathbb{R})$$

#### b. Exemple :

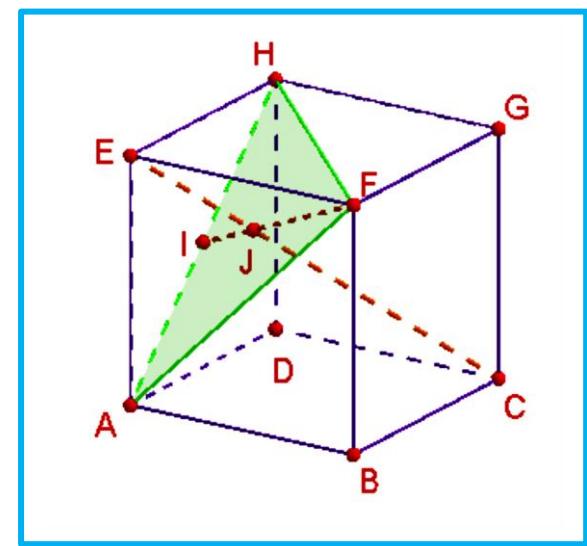


### 04. Exercice :

On considère un cube ABCDEFGH, tel que I est le milieu de [AH] et J est un point de [FI]

$$\text{tel que : } \vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}.$$

1. Construire la figure .
  2. Montrer que :  $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$  .
  3. Montrer que :  $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$  .
  4. Que peut-on conclure pour les points E et J et C .
- Correction :**
1. On construit une figure :





**2.** Montrons que :  $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} ; (\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ .

**3.** Montrons que :  $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH})\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} ; (\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

**Conclusion :**  $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ .

**4.** Déduction pour les points E et J et C :

Puisque  $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$  donc les vecteurs  $\overrightarrow{EJ}$  et  $\overrightarrow{EC}$  sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires.

**Conclusion :** les points E et J et C sont colinéaires.