EXERCICES

Limites et asymptotes et etudes de fonctions

Construire avec un tableau de variation

Pour les exercices de 1 à 4, utiliser le tableau de variations pour trouver le domaine de définition, les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les asymptotes éventuelles. Construire ensuite une courbe susceptible de réprésenter la fonction f en commençant par tracer les asymptotes et les tangentes horizontales.

EXERCICE 1

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0

EXERCICE 2

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

EXERCICE 3

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2

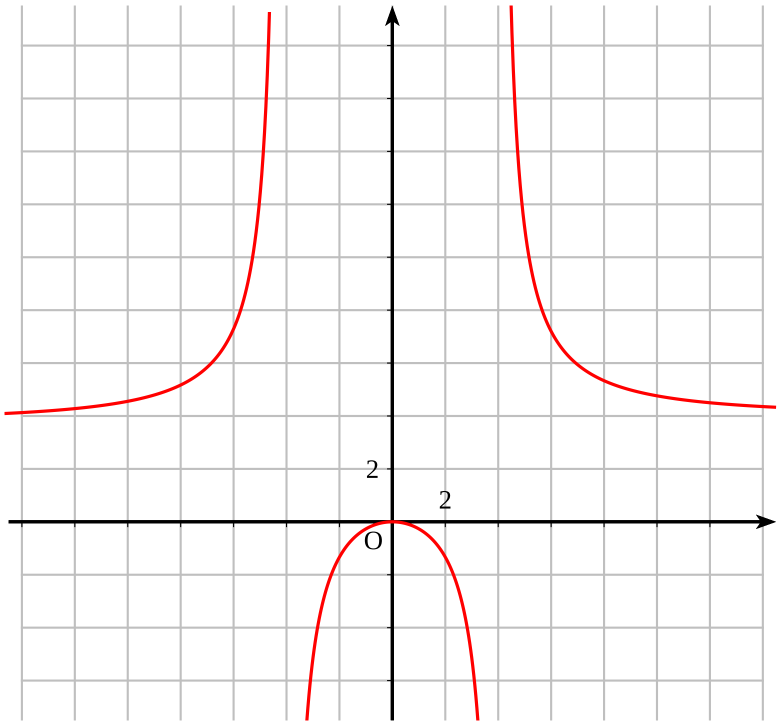
EXERCICE 4

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	4

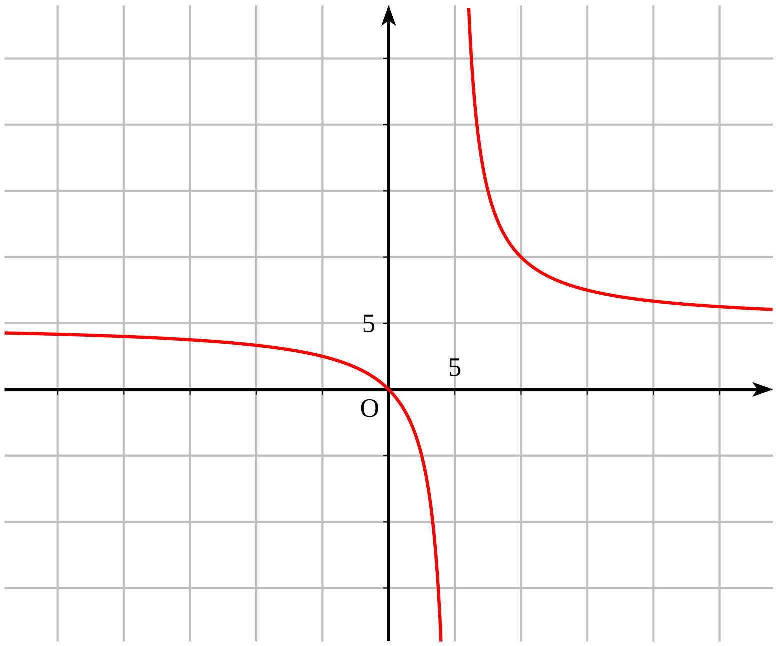
Retrouver un tableau de variation

Pour les courbes suivantes, exercices 5 et 6, déterminer l'ensemble de définition, les limites aux bornes de cet ensemble de définition puis dresser le tableau de variation de la fonction f représentée. Quelles asymptotes pouvez-vous conjecturer ? Donner une expression d'une fonction f qui correspondrait à la courbe tracée ? Vérifier sur votre calculatrice.

Exercice 5



Exercice 6



Théorème sur les limites

Exercice 7

Étudier les limites en a de la fonction indiquée. Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et la limite à gauche en a.

1) $f(x) = \dfrac{x^2-2}{x-1}$; $\quad a = 1$

2) $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$; $\quad a = \dfrac{1}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x-6}$; $\quad a = 2$

4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-1}$; $\quad a = -1$

Exercice 8

Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x^3 + x^2 - 1$

3) $f(x) = 2 - x - x^2$

4) $f(x) = -5x^3 + x - 2$

5) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$

6) $f(x) = \dfrac{2x+6}{3-x}$

7) $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x^2-8}$

8) $f(x) = \dfrac{x^3-x+5}{3x^2-2x+1}$

9) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

Formes indéterminées

Exercice 9

Pour les exercices suivants, étudier la limite de la fonction f au point indiqué.

1) $f(x) = \dfrac{(x-1)(2x+3)}{x^2-1}$ en 1.

2) $f(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$ en 2.

3) $f(x) = \dfrac{x^2-x}{2x^2-x}$ en 0.

4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1.

Études de fonctions

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

1) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f. On cherchera à factoriser f'.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, T_0 ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction f. Unités : 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.
6) La courbe $\mathscr{C}_f$ semble symétrique par rapport à l'origine. Confirmer cette conjecture.

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$

1) Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f.
3) Résoudre $f'(x) = 0$.
4) Dresser le tableau de variation de la fonction f. On donnera la valeur des extremum à 10^{-2} près.
5) Déterminer une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}_f$ en 0.
6) T_0 coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en un autre point. Déterminer ce point.
7) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, T_0 ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction f. Unités : 1 cm sur les abscisses et 2 cm sur les ordonnées.

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-2)^2}$

1) Étudier les limites de f en 2, $+\infty$ et en $-\infty$.
   Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f. On cherchera à factoriser f'.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente T_1 à $\mathscr{C}_f$ en 1.
5) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe une de ses asymptote en x_0. Déterminer x_0.
6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, T_1 ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction f. Unités : 1 cm sur les deux axes.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x(x-3)}$

1) Étudier les limites de f en 0, 3, $+\infty$ et en $-\infty$.
   Que peut-on en conclure pour la courbe $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f. On cherchera à factoriser f'.
3) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
4) Déterminer une équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ en 2.
5) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, T_2 ainsi que les asymptotes éventuelles. On marquera les extremum de la fonction f. Unités : 1 cm sur les deux axes.
6) La courbe $\mathscr{C}_f$ coupe une de ses asymptote en x_0. Déterminer x_0.

Exercice 14

Asymptote oblique

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2 + x + 3}{2(x+2)} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

1) Tracer dans une même fenêtre de la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et g. Qu'observe-t-on pour les grande valeurs de x ?

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $h(x) = g(x) - f(x)$

   a) Déterminer l'expression de la fonction h

   b) En déduire la limite de $h(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

   c) Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g.

3) On considère l'algorithme ci-contre

   a) Expliquer le rôle de cet algorithme.

   b) Quelle valeur de x, l'algorithme affiche-t-il lorsque l'on saisit $a = 0,01$?

Variables : x : entier a : réel
Entrées et initialisation
   Lire a réel positif proche de 0
   x prend la valeur -1
Traitement
   tant que $\dfrac{3}{2(x+2)} > a$ **faire**
      x prend la valeur $x + 1$
   fin
Sorties : Afficher x