

EXERCICES D'ÉTUDE

EX 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^2}}$ et (C_f) sa courbe dans un R.O.N $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
2. Etudier les branches infinies de la courbe (C_f)
3. a) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f'(x) = \frac{x(3 + x^2)}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$
 b) dresser le tableau de variation de f
 c) montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f''(x) = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}$ puis déterminer le point d'inflexion de (C_f)
4. a) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D) \ y = x$
 b) tracer la courbe (C_f)
5. soit $(U_n)_n$ la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
 a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ 0 \leq U_n \leq 1$
 b) montrer que la suite $(U_n)_n$ est décroissante

EX 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

- 1) a) déterminer le domaine de f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 b) donner une interprétation des résultats
- 2) a) montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$
 b) dresser le tableau de variation de f
- 3) a) déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$
 b) vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f(x) - x = \frac{-x^2(x+1)}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})}$
- c) étudier la position de (C_f) par rapport à la droite d'équation $(D) \ y = x$
- 4) tracer la courbe (C_f) et la droite $y = x$
- 5) soit $(U_n)_n$ la suite telle que : $U_0 = -\frac{3}{4}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
 a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ -1 < U_n < 0$
 b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$
 c) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ |U_{n+1} + 1| \leq \frac{4}{5} |U_n + 1|$
 d) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ |U_n + 1| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$