PROF: ATMANI NAJIB

EXERCICES DE REVISION
SUR LIMITES ET DERIVATION

Exercice 1

La fonction f est définie sur R par: $f(x) = -x^2 - 5x - 1$.

1) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.
2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variation.
3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1

Corrigé de l'exercice 1

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x^2 = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2 = -\infty$

2) $f'(x) = -2x - 5$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{21}{4}$	↘	$-\infty$

3) $f'(1) = -7$ donc la tangente a pour équation $y = -7x + b$

De plus $f(1) = -7$; donc $-7 = -7\times1 + b \Rightarrow b = 0$

La tangente a pour équation : $y = -7x$

Exercice 2

La fonction f est définie sur R par: $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$.

1) Déterminer les limites de f en -∞ et en +∞.
2.a) Calculer la dérivée et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variation.

Corrigé de l'exercice 2

1) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{3} = -\infty$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$

2) $f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Etudions le signe $x^2 - 2x - 3$

$\Delta = 4+12=16$ $\quad x_1=\dfrac{2-4}{2}=-1$ $\quad x_2=\dfrac{2+4}{2}=3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$17/3$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	$-\infty$				-5		

Exercice 3

La fonction f est définie sur R\{-2} par: $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+2}$.

1.a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)$ et $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)$. Préciser le signe de ($x$+2) en fonction de x.

c) En déduire les limites suivantes: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$.

d) Montrer que la courbe représentative de f admet deux asymptotes.

2.a) Calculer la dérivée.

b) Dresser le tableau de variation.

3) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point A d'abscisse 0

Corrigé de l'exercice 3

1.a) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)=1$

$\lim\limits_{x\to -2}(x+2)=0$

Si $x<-2$ alors $x+2<0$ et si $x>-2$ alors $x+2>0$

c) D'où: $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to +2\\ x>+2}} f(x)=+\infty$

d) Les droites d'équation x = -2 et y = 2 sont asymptotes à la courbe.

2)

$$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+5)\times 1}{(x+2)^2}=\frac{-1}{(x+2)^2}<0$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

3) $f'(0)=-\frac{1}{4}$ donc la tangente a pour équation $y=-\frac{1}{4}x+b$

De plus $f(0)=\frac{5}{2}$; donc $\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}\times 0+b\Rightarrow b=\frac{5}{2}$

La tangente a pour équation : $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}$

Exercice 4

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}$

1) a) Déterminer l'ensemble de définition E de f et les limites aux bornes de E.
   b) En déduire l'équation de l'asymptote verticale à la courbe C représentative de f.
2) Montrer que pour tout x de E, il existe trois réels a, b et c tels que f peut s'écrire sous la forme: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
3) a) Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction g définie sur E par: $g(x)=f(x)-(ax+b)$
   b) Soit D la droite d'équation $y=ax+b$ (elle est appelée asymptote oblique). Étudier les positions relatives de D et C.
4) a) Calculer la dérivée.
   b) Etudier son signe.
5) Dresser le tableau de variation

Corrigé de l'exercice 4

1) a) Limites aux bornes.

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty.$$

De même : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x=-\infty$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

On remarque que (x + 1) change de signe en -1, on va être amené à séparer l'étude de la limite en -1 en deux cas.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1}(x^2-3x+5)=9 \\ \lim\limits_{x\to -1}(x+1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x)=-\infty \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x)=+\infty \end{cases}$$

b) Puisque $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$, la droite d'équation x = -1 est asymptote verticale à la courbe C représentative de f.

2) Pour tout $x\in$ R\{-1}

$$ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1}=\frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$$

$$\frac{x^2-3x+5}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1} \Leftrightarrow x^2-3x+5=ax^2+(a+b)x+b+c$$

Par identification des coefficients des termes de même puissance, on obtient :

$$\begin{cases} a=1 \\ a+b=-3 \\ b+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=9 \end{cases} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{f(x)=\frac{x^2-3x+5}{x+1}=x-4+\frac{9}{x+1}}$$

3.a) $g(x)=f(x)-(x-4)=\dfrac{9}{x+1}$

On en déduit : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=0$

b) La droite D d'équation y = x - 4 est appelée asymptote oblique à la courbe.

Pour étudier la position relative de D et C, on étudie le signe de $g(x)=\dfrac{9}{x+1}$

Le signe de $\left(\dfrac{9}{x+1}\right)$ ne dépend que du signe de $(x+1)$

x	$-\infty$ -1	$+\infty$
$g(x)=\dfrac{9}{x+1}$	-	+
Positions relatives de D et C	C est au-dessous de D	C est au-dessus de D

4.a) Dérivée

$$f'(x)=\frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x+5)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x-8}{(x+1)^2}$$

b) Etudions le signe de x^2+2x-8

$\Delta=4+32=36$ $\qquad$ $x_1=\frac{-2-6}{2}=-4$ $\qquad$ $x_2=\frac{-2+6}{2}=2$

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
x^2+2x-8		$+$	0	$-$	0	$+$	

5)

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-11	$\searrow$	$-\infty \;\|\|\; +\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Voici la courbe qui traduit tout le travail précédent.