

TD-ETUDE DES FONCTIONS

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f.

2. Dresser le tableau de signe de $f''(x)$. et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

Solution :1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$2) f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f''(x)$	+	0	-	0

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

(C_f) est concave sur $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice3 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de f a droite en $x_0 = -1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f = [-1, +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable a droite en $x_0 = -1$.

2) Interprétation géométrique :

La courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1; f(-1))$ dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

Exercice4 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de D_f et

(Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
x^2-4	+	0	-	0

(C_f) est convexe sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

(C_f) est concave sur $[-2, 2]$ et $A(1, f(1))$ et

$B(-1, f(-1))$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice2 : Soit la fonction f définie sur $I = [0; \pi]$

par : $f(x) = \sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2\cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2\cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Et } k \in \mathbb{Z} \text{ donc les solutions sont : } x = \frac{\pi}{4} \text{ et } x = \frac{3\pi}{4}$$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 2x$	+	0	-	0

On a donc :



x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	-	0	+

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $x = 2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ): $y = \frac{2}{3}$ est une asymptote

horizontal a la courbe C_f

Exercice5 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Montrer que la droite (Δ): $y = -1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Solution :

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

($|x| = x$ car $x \rightarrow +\infty$)

La droite (Δ): $y = 1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$$

La droite (Δ): $y = -1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 2 + \frac{x-1}{x^2}$$

étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞

Solution :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ car :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : La droite (Δ): $y = 2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞ étudions la position de courbe (C_f) et la droite (Δ) ?

$$f(x) - 2 = \frac{x-1}{x^2} \text{ le signe et celui de } x-1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-2$	-	-	0	+

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ): $y = 2$

Sur l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$ et la courbe C_f est au-dessus de (Δ): $y = 2$ Sur l'intervalle $]1; +\infty[$ C_f coupe (Δ) au point $I(1; 2)$

Exercice7 : Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\} : f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3}$$

montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

$$\text{Solution } f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Donc : la droite (Δ): $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exercice8 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$



Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$
Exercice9 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$

Exercice10 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = x + \sqrt{x}$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite (Δ) : $y = x$.

Exercice11 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Déterminer D_f

2) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) On a : $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 = a \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Donc : la droite (Δ) : $y = 1x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b) De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 = a \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Donc : la droite (Δ) : $y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exercice12 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1) Déterminer D_f

2) montrer que la droite (Δ) : $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

$$\text{Solution} : 1) \text{On a : } f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	—	0	+	0 —

donc : $D_f = [0, 1]$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0, 1]$ alors

$1 - x \in D_f$?

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$$

Donc : $x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$

b) montrons que : $f(1 - x) = f(x)$????



$$f(1-x) = \sqrt{(1-x)-(1-x)^2} = \sqrt{1-x-(1-2x+x^2)} \\ = \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x)$$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice 13 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

montrer que la La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$????

$$f\left(\frac{2}{3} - x\right) = 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 \\ = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$$

Donc : La droite (Δ): $x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice 14 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

montrer que la La droite (Δ): $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

a) si $x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$ alors $4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{1; 3\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 3$$

$$\Rightarrow -x \neq -1 \text{ et } -x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1 \text{ et } 4-x \neq 4-3$$

$$\Rightarrow 4-x \neq 3 \text{ et } 4-x \neq 1 \text{ alors } 4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$$

b) montrons que : $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$????

$$f(4-x) = \frac{1}{4-x-1} - \frac{1}{4-x-3} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

$$\text{donc } f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$$

donc la droite (Δ): $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice 15: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \cos x$$

montrer que la La droite (Δ): $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$????

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

$$\text{donc } f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

donc la droite (Δ): $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice 16 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

1) montrer que : $\forall x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

2) montrer que le point $\Omega(-1; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1) + 2}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = f(x)$$

2)a) montrons que si $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ alors

$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow -2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) montrons que : $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$??

$$f(-2 - x) + f(x) = -2 - x - 2 + \frac{2}{-2 - x + 1} + x - 2 + \frac{2}{x + 1}$$

$$= -6 + \frac{2}{-x - 1} + \frac{2}{x + 1} = -6 - \frac{2}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} = -6$$

$$\text{donc } f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

donc le point $\Omega(-1; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice 17 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$



donc $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\times 0-f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice 18 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{4x^2+2x-2}$$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$4x^2+2x-2$	+	0	-	0

Donc : $D_f =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$4x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Donc :

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2}\right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3) calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

$$\text{On a: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} \quad x \rightarrow -\infty \quad \text{donc } |x| = -x \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = b \end{aligned}$$

Donc : donc la droite $y = -2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ à la courbe C_f

Exercice 19 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f

2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3) dresser le tableaux de variation de f

4) Étudier la concavité de la courbe de (C_f) et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur \mathbb{R}

5) montrer que le point $I(0; 3)$ est un centre de symétrie de (C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en $I(0; 3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de f montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha < -1$ et vérifier que $-2.2 < \alpha < -2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$

7) Tracer la courbe C_f et discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 3x + 3 = m$

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f) :



$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 3}{x} = x^2 - 3 + \frac{3}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de f ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe de (C_f) ?

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3(x^2 - 1) \text{ donc : } f''(x) = 6x$$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc : (C_f) est convexe sur \mathbb{R}_+

(C_f) est concave sur \mathbb{R}_- et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de (C_f)

5) montrons que le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de (C_f) ?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$$

$$2 \times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$$

donc $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc le

point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en

$$I(0,3) \text{ est : } (T) : y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$$

6) du tableaux de variation de f

On deduit que f admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ et c'est : $f(1) = 1$

$$\text{Donc : } f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty; -1]$ par f est

l'intervalle $]-\infty; 5]$ et $0 \in]-\infty; 5]$ donc il existe un α de $]-\infty; -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et puisque f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ alors quelque soit $x \neq \alpha$ on a $x < \alpha$ ou $\alpha < x < -1$ donc $f(x) < f(\alpha)$ ou $f(\alpha) < f(x) < f(-1)$

$$\text{Donc : } f(x) < 0 \text{ ou } 0 < f(x) \leq 5$$

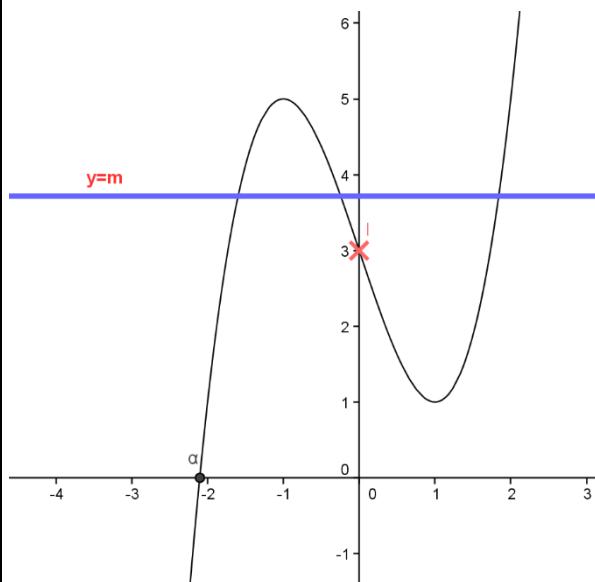
Donc : $\forall x \in]-\infty; -1] - \{\alpha\}$ on a $f(x) \neq 0$ donc α est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que : $f(-2.2) \approx -1.04$ et $f(-2.1) \approx 0.03$

Donc d'après l'étude précédent on a alors : $-2.2 < \alpha < -2.1$

On deduit que : $f(x) > 0 \quad \forall x \in]\alpha; +\infty]$ et

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty; \alpha]$$

7) Tracer la courbe C_f



Remarque : le signe de $f(x)$ partir de (C_f) ?

a) sur $]-\infty; \alpha]$ $f(x) \leq 0$ car (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses

b) sur $]\alpha; +\infty]$ $f(x) \geq 0$ car (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses



$$7) x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Les solutions de l'équation : $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersections de (C_f) avec la droite d'équation : $y = m$

m	$m \in]5; +\infty[\cup]-\infty; 1[$	$m=1$ ou $m=5$	$m \in]1; 5[$
nombre de solutions	1	2	3

Exercice 20 : soit f une fonction définie par 

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal
- 4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f
- 5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f
- 6) montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)

7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite (Δ) : $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

$$b) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et }$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite (Δ') : $x = 0$ est une asymptote à la courbe C_f

$$c) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite (Δ'') : $x = 1$ est une asymptote à la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

$$\text{si } x \in]0; 1[\text{ alors } f(x) - 2 > 0$$

Donc la courbe C_f est au-dessus de (Δ) : $y = 2$

$$\text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\text{ alors } f(x) - 2 < 0$$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ) : $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec

$$\text{l'axe des abscisses sont : } A\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; 0\right) \text{ et } B\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

6) montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) :

On a : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

a) si $x \in D_f$ alors $1-x \in D_f$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

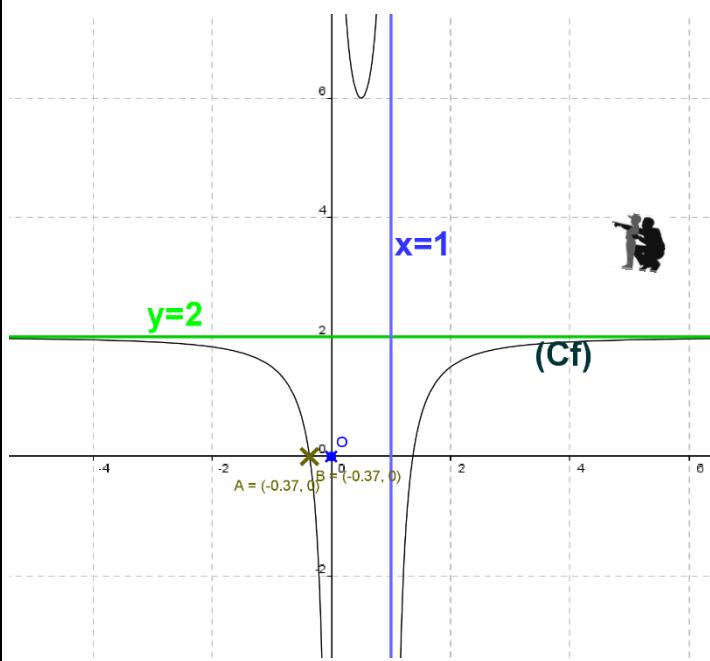
b) montrons que : $f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$?????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$



donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice 21 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de D_f

2) déterminer les réels a et b tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} \quad \forall x \in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

5) montrer que le point $\Omega(3; 4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) calculer $f''(x) \quad \forall x \in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de f

7) étudier la position de courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ)

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

9) déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en $x_0 = 2$

9) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$

donc : $D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) on fait la division euclidienne de $x^2 - 3x + 6$ par $x - 3$ on trouve : $x^2 - 2x + 1 = (x-3)(x+1) + 4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+1) + 4}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 4$

3) Les branches infinies de la courbe (C_f)

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite $x = 3$ est une asymptote à la courbe C_f

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Donc : la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) les variations de f et le tableau de variation ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} : f'(x) = \left(x + 1 + \frac{4}{x - 3} \right)' = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x-3)^2 - 4}{(x-3)^2} = \frac{(x-3-2)(x-3+2)}{(x-3)^2} = \frac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-5)(x-1)$

$$(x-5)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x-1=0 \Leftrightarrow x=5 \text{ ou } x=1$$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0

Le tableau de variation

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	8	$+\infty$

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f) ??

a) Montrons que si $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ alors

$6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$?

$$x \in \mathbb{R} - \{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Montrons que : $f(6-x)+f(x)=8=2b$?

$$\begin{aligned} f(6-x)+f(x) &= 6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3} \\ &= 8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8 \end{aligned}$$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) étudie la concavité de la courbe de f ?

$$\forall x \in D_f : f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$$

$$\text{Donc : } f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x > 3$ (C_f) est convexe

Si $x < 3$ (C_f) est concave

$$7) f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$$

Si $x > 3$ alors $f(x)-(x+1) > 0$

Donc la courbe C_f est au-dessus de (Δ)

Si $x < 3$ alors $f(x)-(x+1) < 0$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ)

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-3}=0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} :$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \quad \Delta=b^2-4ac=4-4 \times 1 \times 1=0$$

$x=\frac{-b}{2a}=1$ donc le point d'intersection de la

courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

$f(0)=-\frac{1}{3}$ donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est $C\left(0; -\frac{1}{3}\right)$

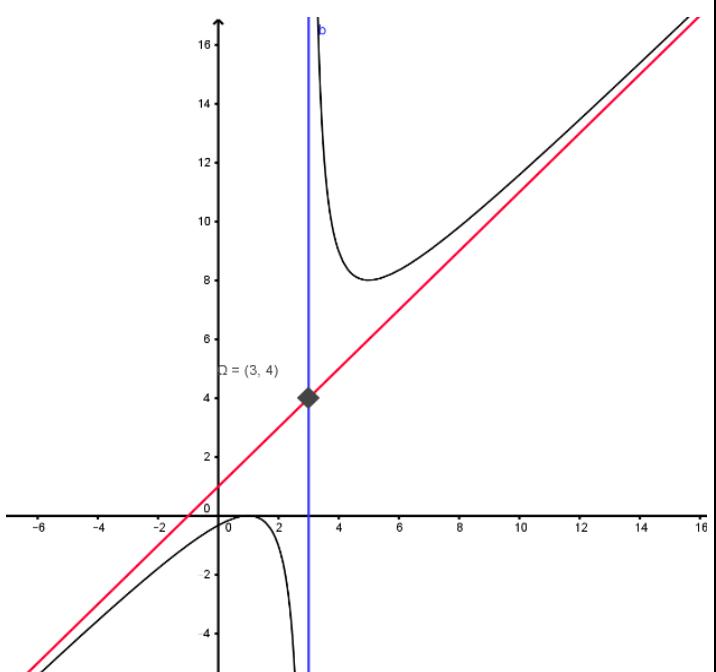
9) l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f)

en $x_0=2$ est $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3 \text{ et } f(2)=\frac{2^2-2 \times 2+1}{2-3}=-1$$

$$y=f(2)+f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-1-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+5$$

9) La courbe (C_f) :



Exercice 22: Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$$

1) Déterminer D_f

2) Déterminer les limites aux bornes de D_f

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier la dérivable de f adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

6) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-x-2 \geq 0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4 \times 2 \times (-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

$$x_1=-1 \text{ et } x_2=2$$



x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2 - x - 2$	+	0	0	+

Donc : $D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) on a : $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$

Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étude de la dérivable de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1, 0)$ et $B(2, 0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Donc :

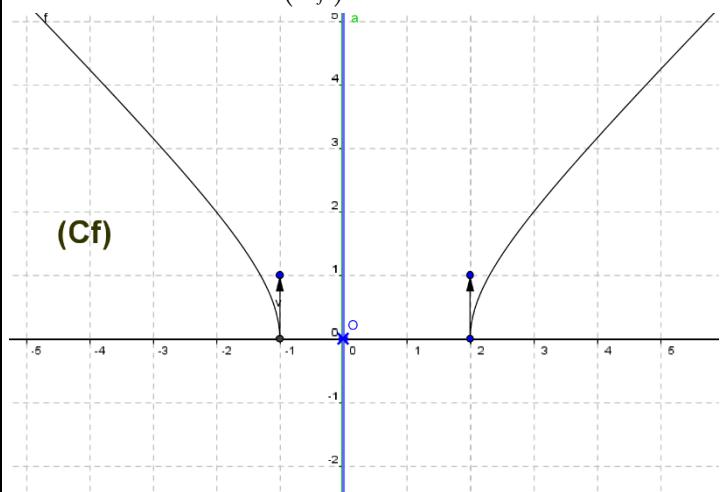
$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2x - 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$	0	0	$+\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exercice 23: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T = \pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Solution :

1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $\pi + x \in \mathbb{R}$

b)

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = \pi$

Remarque : la fonction : $x \rightarrow \cos(ax + b)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$ si $a \neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = \pi$

donc par exemple : $D_E = [0; \pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigonométrique en déduit le signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	2π	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x + \frac{\pi}{4})$	+	0	-	0

le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\sqrt{2}$	-2	2	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f : on déduit que

Que f change de signe en sur les intervalles $[0; \frac{3\pi}{8}]$ et $[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I = [0; \frac{7\pi}{8}]$ l'équation :

$$f(x) = 0$$

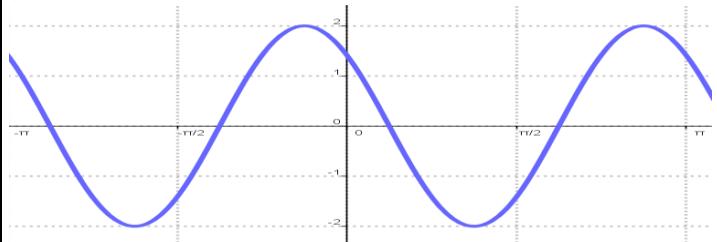
$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle

$$D_E = [0; \pi]$$

Et on déduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi i$ $k \in \mathbb{Z}$



Exercice 24: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de f en en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(2\pi + x) = 4 \sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$$

$$f(2\pi + x) = 4 \sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0; 2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0; 2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = 4 \cos x - 2 \sin(2x) = 4 \cos x - 4 \cos x \sin x$$



$$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ Donc :}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	1	3	-5	1

4) l'équation de la tangente (T) à la courbe de f

$$\text{en } x_0 = 0 \text{ est : } y = f(0) + f'(0)(x - 0)$$

$$\text{Avec : } f'(0) = 4 \text{ et } f(0) = 1 \text{ donc : } y = 4x + 1$$

5) calcule de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

$$\text{On a } f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1; 1]$ et l'équation $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ devient : $X^2 - X - 1 = 0$

$$\Delta = 9 \text{ les solutions sont : } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1$$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigonométrique on déduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

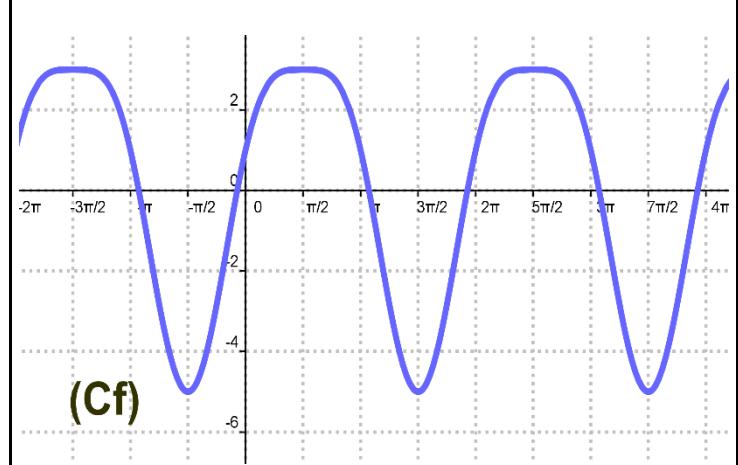
x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$f''(x)$	-	0	+	0

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$



Exercice 25: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de f

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$
il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de f ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

Donc f est impaire

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0; \pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0; \pi]$ et $\forall x \in D_E$ on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

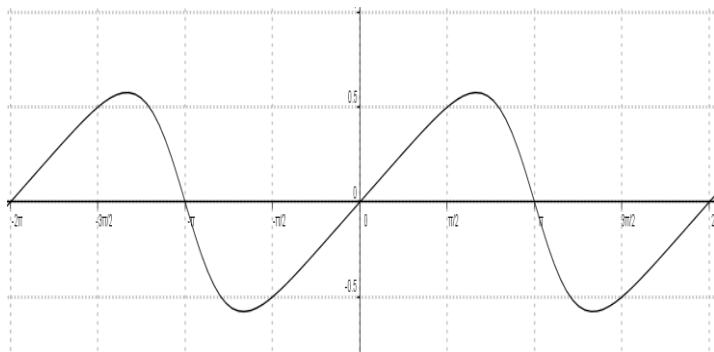
Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$



x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Autre exercices

Exercice1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Déterminer les limites de f aux bornes de D_f .
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice2 : Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition D_g .

2. Déterminer les limites aux bornes de D_g

3. Effectuer la division de

$$P(x) = 2x^2 - x \text{ sur } (x - 1)$$

puis en déduire que $(\forall x \in Dg) g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x + 1)$

On dit que la droite (Δ) : $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

Exercice3 : Soit la fonction h définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de h et étudier sa parité.

2. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$

3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction h et dresser le T.V

4. Déterminer l'équation de la tangente en $O(0,0)$

5. Etudier les positions relatives de T et la courbe

6. Tracer la courbe C_f

Exercice4 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x - E(x)$

1. Tracer la courbe de la fonction f sur $[0, 2]$.

2. Etudier la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

3. Que remarquer vous ?

C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

