

## TD-ETUDE DES FONCTIONS

**Exercice1 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction  $f$ .

2. Dresser le tableau de signe de  $f''(x)$ . et étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

**Solution :1)**

$$f'(x) = \left( \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$2) f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$2$	$+\infty$
$x^2-4$	$+$	$-$	$+$	$+$

$(C_f)$  est convexe sur  $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

$(C_f)$  est concave sur  $[-2, 2]$  et  $A(1, f(1))$  et

$B(-1, f(-1))$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

**Exercice2 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; \pi]$

par :  $f(x) = \sin^2 x$  Étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur  $I$

**Solution :**  $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)'(\sin x)^{2-1} = 2\cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2\cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et  $k \in \mathbb{Z}$  donc les solutions sont :  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	$0$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos 2x$	$+$	$0$	$-$	$+$

On a donc :

$x$	$0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$f''(x)$	$+$	$0$	$-$	$+$

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  et  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  et

$B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

**Exercice3 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = -1$ .

2. donner une interprétation géométrique

**Solution :**  $D_f = [-1, +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = -1$ .

2) Interprétation géométrique :

La courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite du point  $A(-1; f(-1))$  dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

**Exercice4 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de  $D_f$  et

(Donner une interprétation géométrique des résultats)

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x-6 = 0^-$$



$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$3x-6$	$-$	$0$	$+$

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite  $(\Delta)$ :  $x = 2$  est une asymptote vertical a la courbe  $C_f$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite  $(\Delta)$ :  $y = \frac{2}{3}$  est une asymptote

horizontal a la courbe  $C_f$

**Exercice5 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Monter que la droite  $(\Delta)$ :  $y = -1$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$  **Solution :**

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$$

$$(|x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty)$$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 1$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -1$$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = -1$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exercice6 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 2 + \frac{x-1}{x^2}$$

étudier la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\infty$

**Solution :**

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  car :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\infty$  étudions la position de courbe  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  ?

$$f(x) - 2 = \frac{x-1}{x^2} \text{ le signe et celui de } x-1$$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	$-$	$0$	$+$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ :  $y = 2$  Sur l'intervalle  $]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  et la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$ :  $y = 2$  Sur l'intervalle  $]1; +\infty[$   $C_f$  coupe  $(\Delta)$  au point  $I(1; 2)$

**Exercice7 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\} : f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$$

montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

$$\text{Solution } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta)$ :  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta)$ :  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exercice8 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$



Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe  $(Ox)$  au voisinage de  $+\infty$

**Exercice9 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe  $(Oy)$  au voisinage de  $+\infty$

**Exercice10 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite  $(\Delta): y = x$ .

**Exercice11 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

**Solution :1)** On a :  $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $D_f = \mathbb{R}$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 = a \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta): y = 1x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

b) De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 = a \end{aligned}$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Donc : la droite  $(\Delta): y = -x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exercice12 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :1)** On a :  $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Tableau de signe :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	
$x-x^2$	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

donc :  $D_f = [0, 1]$

2)a) montrons que : si  $x \in D_f = [0, 1]$  alors

$$1 - x \in D_f ?$$

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$$

$$\text{Donc : } x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$$

b) montrons que :  $f(1 - x) = f(x)$  ?



$$f(1-x) = \sqrt{(1-x) - (1-x)^2} = \sqrt{1-x - (1-2x+x^2)} \\ = \sqrt{1-x-1+2x-x^2} = \sqrt{x-x^2} = f(x)$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de

symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice13 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de

symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in D_f = \mathbb{R}$  alors  $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$  ???

$$f\left(\frac{2}{3} - x\right) = 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 \\ = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de

symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice14 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

a) si  $x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  alors  $4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{1; 3\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 3$$

$$\Rightarrow -x \neq -1 \text{ et } -x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1 \text{ et } 4-x \neq 4-3$$

$$\Rightarrow 4-x \neq 3 \text{ et } 4-x \neq 1 \text{ alors } 4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$$

b) montrons que :  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  ???

$$f(4-x) = \frac{1}{4-x-1} - \frac{1}{4-x-3} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

donc  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

donc la droite  $(\Delta): x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice15:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \cos x$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ???

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

donc  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

donc la droite  $(\Delta): x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice16 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$$

1) montrer que :  $\forall x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = f(x)$$

2)a) montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  alors

$-2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1$$

$$\Leftrightarrow -2-x \neq -1 \Leftrightarrow -2-x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) montrons que :  $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b$  ??

$$f(-2-x) + f(x) = -2-x-2 + \frac{2}{-2-x+1} + x-2 + \frac{2}{x+1}$$

$$= -6 + \frac{2}{-x-1} + \frac{2}{x+1} = -6 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+1} = -6$$

donc  $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

donc le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Exercice17 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

montrer que le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de

symétrie de  $(C_f)$

**Solution :**

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$  ??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$



donc  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Exercice18 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$

3) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1/2$	$+\infty$	
$4x^2+2x-2$	+	0	-	0	+

Donc :  $D_f = ]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$4x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Donc :

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2}\right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3) calculons :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} \quad x \rightarrow -\infty \text{ donc } |x| = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = b$$

Donc : donc la droite  $y = -2x - \frac{1}{2}$  est une

asymptote oblique au voisinage de  $-\infty$  a la courbe  $C_f$

**Exercice19 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

1) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$

2) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

3) dresser le tableaux de variation de  $f$

4) Étudier la concavité de la courbe de  $(C_f)$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur  $\mathbb{R}$

5) montrer que le point  $I(0;3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  et déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$  en  $I(0;3)$

6) on utilisant le tableaux de variation de  $f$  montrer que l'équation :  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que :  $\alpha < -1$  et vérifier que  $-2.2 < \alpha < -2.1$  et déterminer le signe de  $f(x)$

7) Tracer la courbe  $C_f$  et discuter suivant les valeurs du paramètre  $m$  le nombre de solutions de l'équation :  $x^3 - 3x + 3 = m$

**Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$  car  $f$  est une fonction polynôme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$  :



$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 3}{x} = x^2 - 3 + \frac{3}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$

3) le tableaux de variation de  $f$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x-1)(x+1)$

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$5$	$1$	$+\infty$	

4) Étude de la concavité de la courbe de  $(C_f)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3(x^2 - 1) \text{ donc : } f''(x) = 6x$$

le tableaux de signe de  $f''(x)$  est :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$

$(C_f)$  est concave sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe 0 donc  $I(0,3)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

5) montrons que le point  $I(0,3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ?

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ?

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$$

$$2 \times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$$

donc  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc le

point  $I(0,3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$  en

$$I(0,3) \text{ est : } (T): y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$$

6) du tableaux de variation de  $f$

On deduit que  $f$  admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$  et c'est :  $f(1) = 1$

$$\text{Donc : } f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

Et l'image de l'intervalle  $]-\infty; -1]$  par  $f$  est

l'intervalle  $]-\infty; 5]$  et  $0 \in ]-\infty; 5]$  donc il existe un

$\alpha$  de  $]-\infty; -1]$  tel que  $f(\alpha) = 0$  et puisque  $f$  est

strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$  alors quelque

soit  $x \neq \alpha$  on a  $x < \alpha$  ou  $\alpha < x < -1$  donc

$$f(x) < f(\alpha) \text{ ou } f(\alpha) < f(x) < f(-1)$$

$$\text{Donc : } f(x) < 0 \text{ ou } 0 < f(x) \leq 5$$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; -1] - \{\alpha\}$  on a  $f(x) \neq 0$  donc  $\alpha$

est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie

$$\text{que : } f(-2.2) \approx -1.04 \text{ et } f(-2.1) \approx 0.03$$

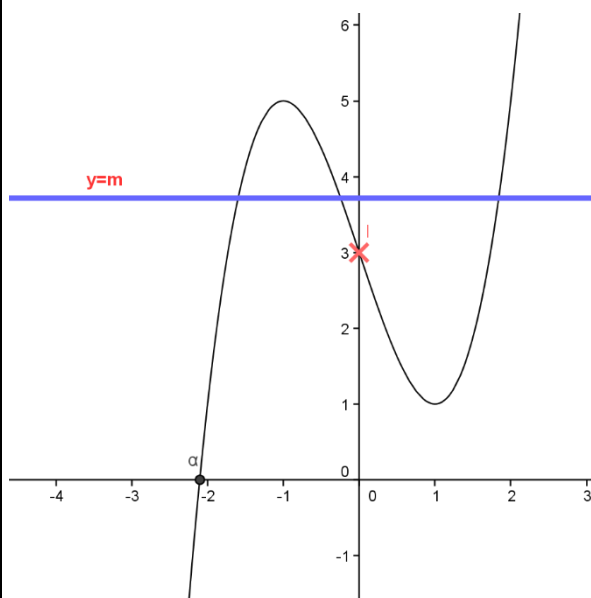
Donc d'après l'étude précédent on a alors :

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$

On deduit que :  $f(x) > 0 \quad \forall x \in ]\alpha; +\infty]$  et

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in ]-\infty; \alpha]$$

7) Tracer la courbe  $C_f$



Remarque : le signe de  $f(x)$  partir de  $(C_f)$  ?

a) sur  $]-\infty; \alpha]$   $f(x) \leq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessous de l'axe des abscisses

b) sur  $]\alpha; +\infty]$   $f(x) \geq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessus de l'axe des abscisses






$$7) x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Les solutions de l'équation :  $f(x) = m$  sont les abscisses des points d'intersections de  $(C_f)$  avec la droite d'équation :  $y = m$

m	$m \in ]5; +\infty[ \cup ]-\infty; 1[$	$m = 1$ ou $m = 5$	$m \in ]1; 5[$
nombre de solutions	1	2	3

**Exercice 20** : soit  $f$  une fonction définie par 

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
- étudier la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal
- étudier les variations de  $f$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- déterminer les points d'intersections de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses  $f$
- montrer que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$
- tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution** : 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $x \neq 1$

$$\text{donc : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontal a la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\pm\infty$

$$b) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite  $(\Delta')$ :  $x = 0$  est une asymptote a la courbe  $C_f$

$$c) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite  $(\Delta'')$ :  $x = 1$  est une asymptote a la courbe  $C_f$

3) étude de la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

$$\text{si } x \in ]0; 1[ \text{ alors } f(x) - 2 > 0$$

Donc la courbe  $C_f$  est au- dessus de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

$$\text{si } x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \text{ alors } f(x) - 2 < 0$$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de  $(C_f)$

avec l'axe des abscisses :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de  $(C_f)$  avec

$$\text{l'axe des abscisses sont : } A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right) \text{ et } B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$$

6) montrons que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un

axe de symétrie de  $(C_f)$  :

$$\text{On a : } D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

a) si  $x \in D_f$  alors  $1-x \in D_f$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

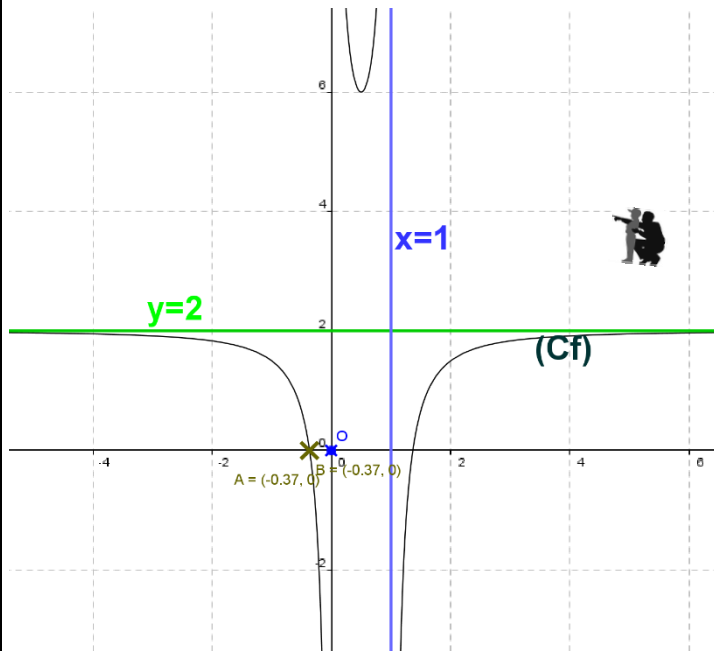
b) montrons que :  $f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$  ????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$



donc la droite  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$



**Exercice 21 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

2) déterminer les réels  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3} \quad \forall x \in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$

5) montrer que le point  $\Omega(3; 4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) calculer  $f''(x) \quad \forall x \in D_f$  et étudier la concavité de la courbe de  $f$

7) étudier la position de courbe  $(C_f)$  et son asymptote oblique  $(\Delta)$

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère

9) déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  en  $x_0 = 2$

9) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$

donc :  $D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) on fait la division euclidienne de  $x^2 - 3x + 6$  par  $x - 3$  on trouve :  $x^2 - 2x + 1 = (x - 3)(x + 1) + 4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1) + 4}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc :  $a = 1$  et  $b = 1$  et  $c = 4$

3) Les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite  $x = 3$  est une asymptote à la courbe  $C_f$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) les variations de  $f$  et le tableau de variation ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} : f'(x) = \left( x + 1 + \frac{4}{x - 3} \right)' = 1 - \frac{4}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)^2 - 4}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 3)^2 - 2^2}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3 - 2)(x - 3 + 2)}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 3)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x - 5)(x - 1)$

$$(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 1$$

Le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

Le tableau de variation





$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 8 $\nearrow$ $+\infty$		

5) Montrons que le point  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ??

a) Montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$  alors

$$6-x \in \mathbb{R} - \{3\} ?$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Montrons que :  $f(6-x) + f(x) = 8 = 2b$  ?

$$f(6-x) + f(x) = 6-x+1 + \frac{1}{6-x-3} + x+1 + \frac{1}{x-3} = 8 + \frac{1}{-x+3} + \frac{1}{x-3} = 8 - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} = 8$$

Donc :  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) étudie la concavité de la courbe de  $f$  ?

$$\forall x \in D_f : f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2}$$

$$\text{Donc : } f''(x) = \frac{2(x-3)4}{(x-3)^4} = \frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$$

Le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x-3$

Si  $x > 3$   $(C_f)$  est convexe

Si  $x < 3$   $(C_f)$  est concave

$$7) f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-3}$$

Si  $x > 3$  alors  $f(x) - (x+1) > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$

Si  $x < 3$  alors  $f(x) - (x+1) < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} :$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 1 \text{ donc le point d'intersection de la}$$

courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses est  $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

$f(0) = -\frac{1}{3}$  donc le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est  $C(0; -\frac{1}{3})$

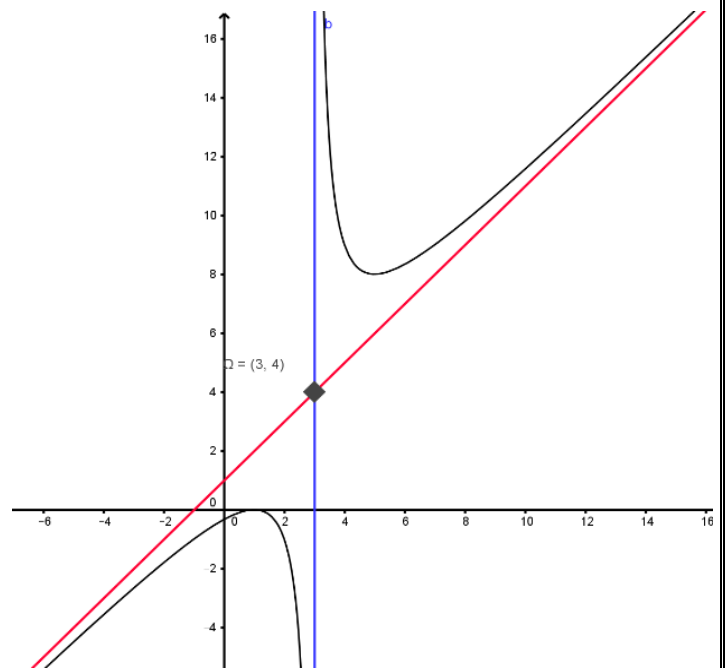
9) l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe  $(C_f)$

en  $x_0 = 2$  est  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(2) = \frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2} = \frac{-3}{1} = -3 \text{ et } f(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2 + 1}{2-3} = -1$$

$$y = f(2) + f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -1 - 3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + 5$$

9) La courbe  $(C_f)$  :



**Exercice 22:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier la dérivabilité de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

6) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$



$x$	$-\infty$	$-1$	$2$	$+\infty$	
$x^2-x-2$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

Donc :  $D_f = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) on a :  $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3) étude des branches infinies de la courbe ( $C_f$ ) au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = -x + \frac{1}{2}$  est une asymptote

oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) étude de la dérivabilité de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale aux points  $A(-1,0)$  et  $B(2,0)$

5) étude des variations de  $f$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

Donc :

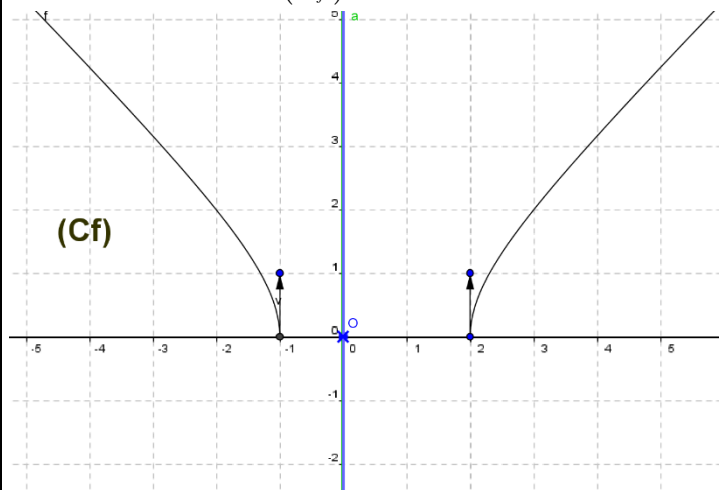
$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2x - 1$

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$			$+$
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$0$	$+\infty$

6) tracer la courbe ( $C_f$ )



Exercice23: soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer que  $f$  est périodique de période

$T = \pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

4) tracer la courbe ( $C_f$ ) sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

Solution :

1)  $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $\pi + x \in \mathbb{R}$

b)

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$



$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = \pi$

Remarque : la fonction :  $x \rightarrow \cos(ax + b)$  est

périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  si  $a \neq 0$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = \pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f'(x)$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Le tableau de signe de  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$	+	0	-	0	+

le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$-2$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de  $f$  : on deduit que

Que  $f$  change de signe en sur les intervalles

$\left[0; \frac{3\pi}{8}\right]$  et  $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$  cad  $(C_f)$  coupe l'axe des

abscisses

On va résoudre dans  $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$  l'équation :

$$f(x) = 0$$

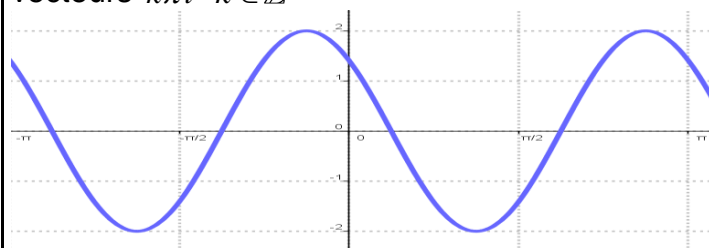
$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle

$$D_E = [0; \pi]$$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs  $k\pi i$   $k \in \mathbb{Z}$



**Exercice24:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer que  $f$  est périodique de période

$T = 2\pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

4) donner l'équation de la tangente  $(T)$  a la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 0$

5) calculer  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe  $(C_f)$

7) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(2\pi + x) = 4 \sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$$

$$f(2\pi + x) = 4 \sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = 2\pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; 2\pi]$

$f$  est dérivable sur  $D_E = [0; 2\pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = 4 \cos x - 2 \sin(2x) = 4 \cos x - 4 \cos x \sin x$$



$$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On a :  $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ Donc :}$$

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	3	-5	1	

4) l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe de  $f$

en en  $x_0 = 0$  est :  $y = f(0) + f'(0)(x - 0)$

Avec :  $f'(0) = 4$  et  $f(0) = 1$  donc :  $y = 4x + 1$

5) calcule de  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$  :

$$\text{On a } f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$$

**Donc :**  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de  $f''(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On pose :  $X = \sin x$  donc :  $X \in [-1; 1]$  et l'équation

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \text{ devient : } X^2 - X - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 \text{ les solutions sont : } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1$$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

On a :  $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo en deduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

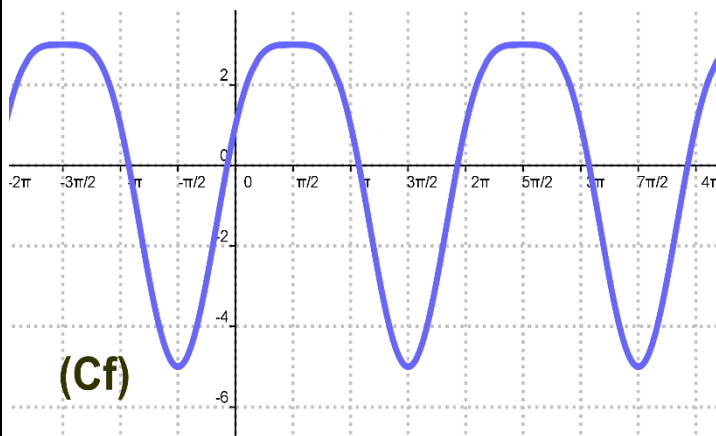
$x$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$f''(x)$	−	0	+	0	−

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$  et  $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et  $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

7) La courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$



**Exercice25:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$

4) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$  car  $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de  $f$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$  donc par exemple :  $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de  $f$  ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

Donc  $f$  est impair

Donc il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f$  est dérivable sur  $D_E = [0; \pi]$  et  $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

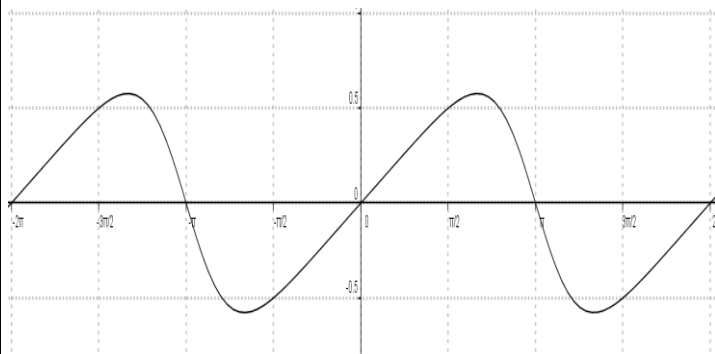
Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \text{ Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$



$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



### Autre exercices

**Exercice1** : Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

**Exercice2** : Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$ .
2. Déterminer les limites aux bornes de  $D_g$
3. Effectuer la division de  $P(x) = 2x^2 - x$  sur  $(x - 1)$

puis en déduire que  $(\forall x \in D_g) \quad g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x + 1)$

On dit que la droite  $(\Delta): y = 2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

**Exercice3** : Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $h$  et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $h$  et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente en  $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de  $T$  et la courbe

6. Tracer la courbe  $C_f$

**Exercice4** : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x - E(x)$$

1. Tracer la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0, 2[$ .

2. Etudier la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

3. Que remarquer vous ?

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron »**

**Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

