Résumé de Cours ETUDE DES FONCTIONS

PROF: ATMANI NAJIB **1BAC SM BIOF**

ETUDE DES FONCTIONS

I) DERIVATION ET MONOT ONIE D'UNE FONCTION

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) f est croissante sur I ssi f'est positive sur I.
2) f est décroissante sur I ssi f'est négative sur I.
3) f est constante sur I ssi f' est nulle sur I.

II) DERIVATION ET EXTREMUMS

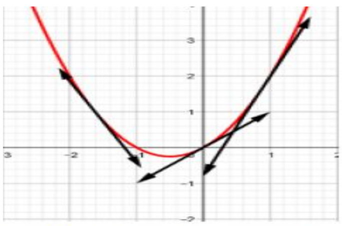
Propriété :Soit fune fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

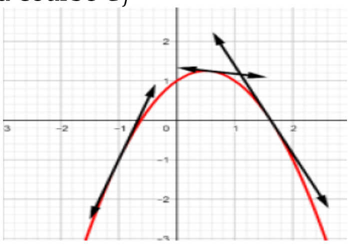
Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

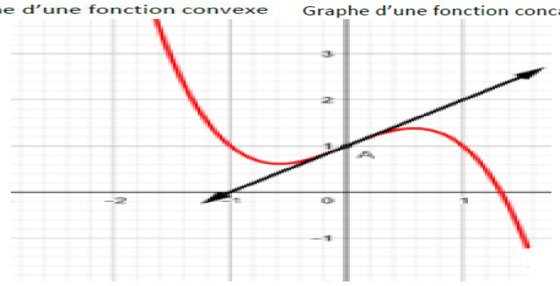
Propriété : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative
Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

III)CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f.
1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f


Graphe d'une fonction convexe


Graphe d'une fonction concave


Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle$I$.
1) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I.
2) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.
3) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

sont les points d'inflexions de (C_f)

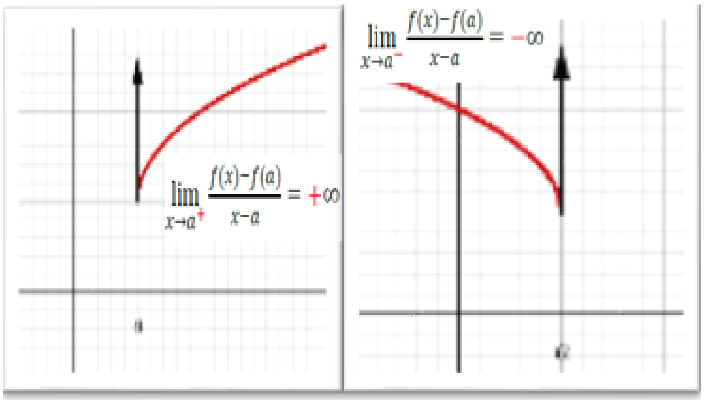
IV) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$

Si $\boldsymbol{f}$ est continue à droite de a et $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$

Alors la courbe Cf admet une demi-tangente verticale à droite de a.

Interprétation géométriques



V) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
La droite (Δ): $x=a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :
a)$(\forall x \in D_f)(2a-x \in D_f)$
b)$(\forall x \in D_f)(f(2a-x)=f(x))$

2)Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :
a) $(\forall x \in D_f)(2a-x \in D_f)$
b) $(\forall x \in D_f)(f(2a-x)=2b-f(x))$

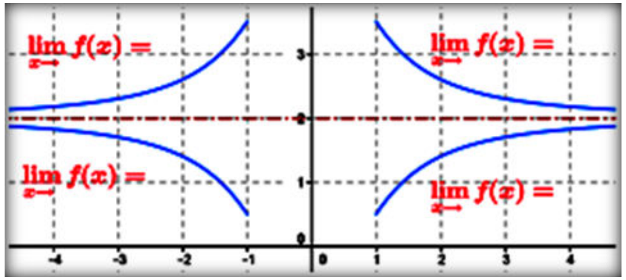
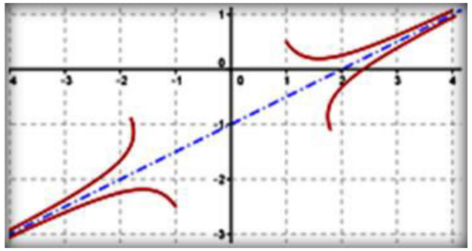
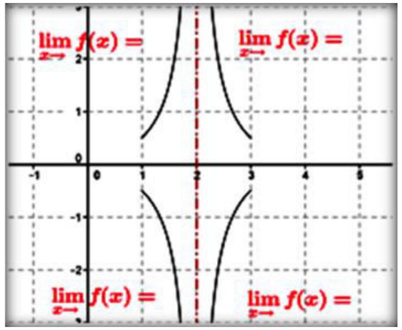
Remarques :
1)Si une fonction est paire alors l'**axe** (Oy). Est un axe symétrie a la courbe
2)Si une fonction est impaire alors Le point $O(0;0)$ est un centre symétrie la courbe

VI)Etude d'asymptotes et de branches infinies

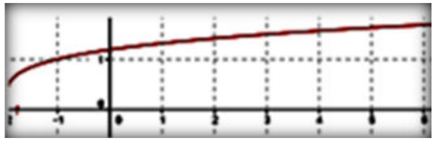
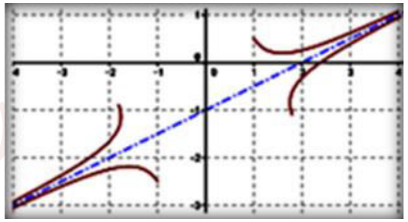
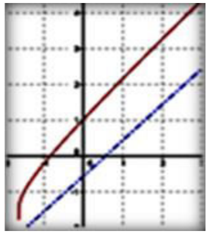
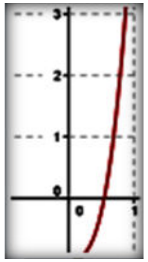
L´étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de la courbe de la fonction
La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction

Voir le tableau suivant :

II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$	Si : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$
 La droite (Δ) d'équation $y=b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞	La droite $(\Delta): y=ax+b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$  (C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)>0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow \left(f(x)-(ax+b)\right)<0$	 La droite (Δ) d'équation $x=a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$	Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a\neq 0$		Si : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$
	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=b$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-ax\right)=\infty$	
 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)	 La droite (Δ) d'équation $y=ax+b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞ .	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y=ax$	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)