

## **ETUDE DES FONCTIONS**

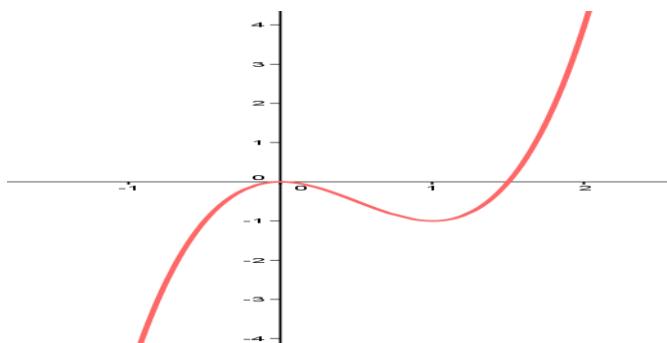
### **I) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION**

**1) Activité :** Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction  $g$ .

2. Dresser le tableau de signe de  $g''(x)$ .



3. La courbe représentative de  $g$  est représentée ci-contre

Étudier graphiquement La position relative de la courbe  $cg$  par rapport à ses tangentes.

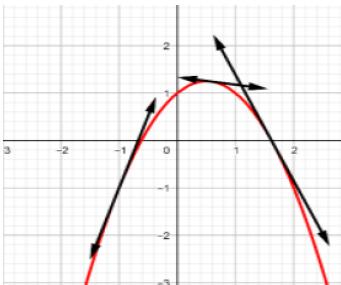
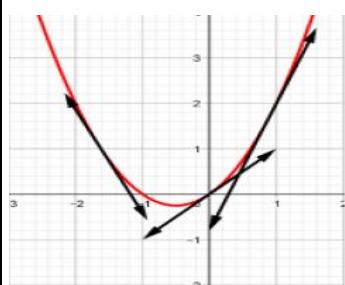
4. Que peut-on conclure ?

#### **2) Définition et propriétés.**

##### **2.1 Définitions :**

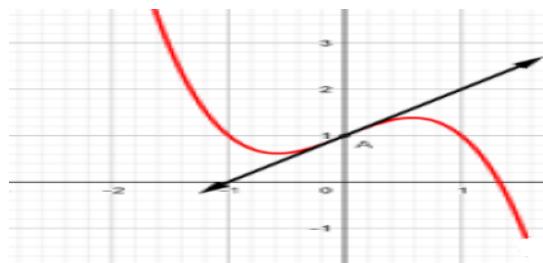
**Définition :** Soit  $f$  une fonction dont la courbe représentative est  $C_f$ .

- 1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
- 2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
- 3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe  $C_f$



Graphe d'une fonction convexe

Graphe d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

**Remarque :** Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $C_f$  traverse sa tangente en  $A$  alors le point  $A$  est un point d'inflexion

#### **2.2 Dérivée seconde et concavité.**

**Théorème :** Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur un intervalle  $I$ .

1) Si  $f''$  est positive sur  $I$  alors  $C_f$  est convexe sur  $I$ .

2) Si  $f''$  est négative sur  $I$  alors  $C_f$  est concave sur  $I$ .

3) Si  $f''$  s'annule en  $a$  en changeant de signe alors  $C_f$  admet un point d'inflexion en  $A(a, f(a))$

**Remarque :** Les conditions du théorème précédent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point d'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

**Exemple :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

1. Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction  $f$ .

2. Dresser le tableau de signe de  $f''(x)$ . et étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

#### **Solution :1)**

$$f'(x) = \left( \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left( \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$2) f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$



$x$	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x^2 - 4$	+	0	0	+

$(C_f)$  est convexe sur  $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

$(C_f)$  est concave sur  $[-2, 2]$  et  $A(1, f(1))$  et

$B(-1, f(-1))$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

**Exercice 1 :** Soit la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; \pi]$  par :  $f(x) = \sin^2 x$ . Étudier la concavité de la courbe de  $f$  et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur  $I$ .

**Solution :**  $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et  $k \in \mathbb{Z}$  donc les solutions sont :  $x = \frac{\pi}{4}$  et  $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos 2x$	+	0	-	0

On a donc :

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$f''(x)$	+	0	-	0

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  et  $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  et

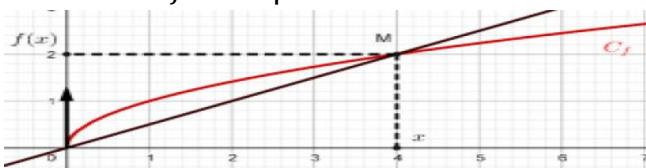
$B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

## II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

**Introduction :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $(\forall x \in \mathbb{R}_+) f(x) = \sqrt{x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

La fonction  $f$  n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient  $x \neq 0$  et  $M(x, f(x))$  un point de la courbe  $C_f$  la droite  $(OM)$  à pour coefficient directeur

$$m = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et le vecteur  $\vec{v}(\sqrt{x}; 1)$  est aussi vecteur

directeur de la droite  $(OM)$  si on fait tendre  $x$  vers 0 (à droite). La droite  $(OM)$  "tend" pour une position limite vers une droite ( $T$ ) de vecteur directeur  $\vec{j}(0; 1)$ . Donc sera parallèle à l'axe  $(Oy)$ .

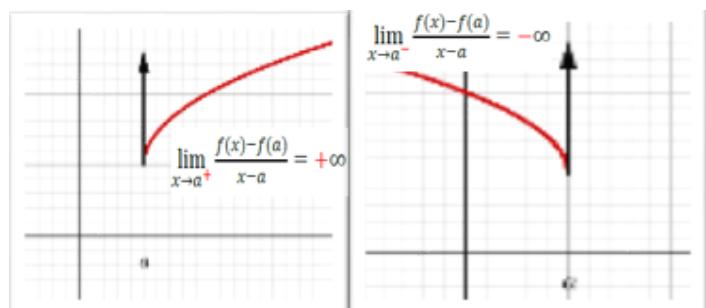
**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$

Si  $f$  est continue à droite de  $a$  et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite de  $a$ .

## Interprétation géométriques



**Exemple :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $x_0 = -1$ .

2. donner une interprétation géométrique

**Solution :**  $D_f = [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $x_0 = -1$ .

2) Interprétation géométrique :

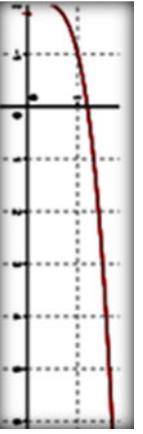
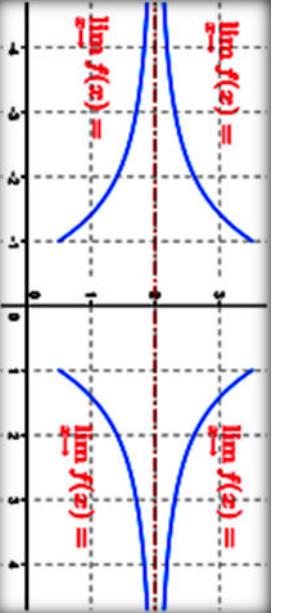
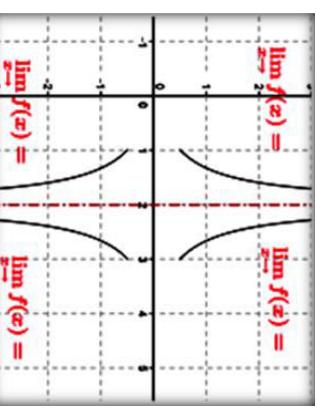
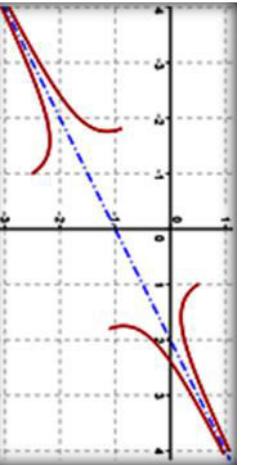
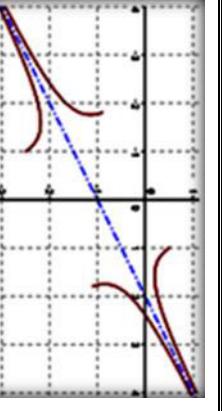
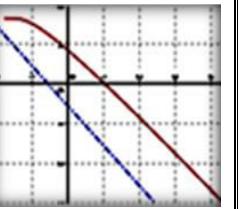
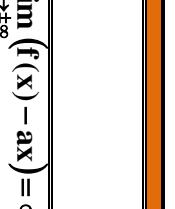
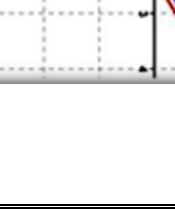
La courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale à droite du point  $A(-1; f(-1))$  dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

## III) BRANCHES INFINIES.



## II) BRANCHES INFINIES.

<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b</math></p> 	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p> 	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty</math></p> 
<p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = ax + b</math> est une Asymptote oblique à (<math>C_f</math>) signifie que : <math>\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0</math></p> 	<p>(<math>C_f</math>) est au dessus de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &gt; 0</math>  (<math>C_f</math>) est en dessous de (<math>\Delta</math>) <math>\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) &lt; 0</math></p> 	<p>Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty</math></p>
<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0</math></p> 	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0</math></p> 	<p><b>Si :</b> <math>\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty</math></p> 
<p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Ox</math>)</p>	<p>La droite (<math>\Delta</math>) d'équation <math>y = ax + b</math> est une Asymptote à (<math>C_f</math>) au voisinage de <math>\infty</math>.</p>	<p>La courbe (<math>C_f</math>) admet une branche parabolique de direction (<math>Oy</math>)</p>

## Exemples :

**Exemple1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de  $D_f$  et  
(Donner une interprétation géométrique des résultats)

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} - \{2\} = ]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^-$$

$x$	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	-	0	+

**Donc :**  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite ( $\Delta$ ):  $x=2$  est une asymptote vertical à la courbe  $C_f$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

*Interprétation géométrique des résultats :*

La droite ( $\Delta$ ):  $y = \frac{2}{3}$  est une asymptote horizontal à la courbe  $C_f$

**Exemple2 :**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

( $|x| = x$  car  $x \rightarrow +\infty$ )

La droite ( $\Delta$ ):  $y=1$  est une asymptote horizontal à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$$

La droite ( $\Delta'$ ):  $y=-1$  est une asymptote horizontal à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exemple3 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 2 + \frac{x-1}{x^2}$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$  car :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : La droite ( $\Delta$ ):  $y=2$  est une asymptote horizontal à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\infty$  étudions la position de courbe ( $C_f$ ) et la droite ( $\Delta$ ) ?

$$f(x)-2 = \frac{x-1}{x^2} \text{ le signe et celui de } x-1$$

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-2$	-	-	0	+

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de ( $\Delta$ ):  $y=2$

Sur l'intervalle  $]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[$  et la courbe  $C_f$  est au-dessus de ( $\Delta$ ):  $y=2$  Sur l'intervalle  $]1; +\infty[$

$C_f$  coupe ( $\Delta$ ) au point  $I(1; 2)$

**Exemple4:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\} : f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3}$$

montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

$$\text{Solution } f(x) = 2x-1 + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite ( $\Delta$ ):  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Donc : la droite ( $\Delta$ ):  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

**Exemple5 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$



**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe ( $Ox$ ) au voisinage de  $+\infty$

**Exemple6 :** Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$  étudier les branches paraboliques au voisinage de  $+\infty$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe  $C_f$  admet une branche parabolique vers l'axe ( $Oy$ ) au voisinage de  $+\infty$

**Exemple7:** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

**Solution :** On a :  $Df = \mathbb{R}^+$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite ( $\Delta$ ):  $y = x$ .

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie au voisinage de  $+\infty$ . La droite ( $\Delta$ ):  $y = ax + b$  ( $a \neq 0$ ) est une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

**Preuve :** D'après la propriété précédente : On peut écrire  $f(x) = ax + b + h(x)$  où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b + h(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$$

D'autre part :  $f(x) - ax = b + h(x)$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la courbe  $C_f$  que la fonction  $f$  admet une asymptote oblique au voisinage de  $+\infty$  et au voisinage de  $-\infty$  que l'on déterminera

**Solution :** 1) On a :  $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc  $D_f = \mathbb{R}$

$$2) \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Donc : la droite ( $\Delta$ ):  $y = 1x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

b) De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Donc : la droite ( $\Delta$ ):  $y = -x$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$



## IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

### 1) Axe de symétrie :

**Activité :** Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$$

1. Déterminer  $D_f$  ensemble de définition de la fonction  $f$ .

2. Montrer que  $(\forall x \in D_f) (2 - x \in D_f)$

3. Montrer que  $(\forall x \in D_f) (f(2 - x) = f(x))$

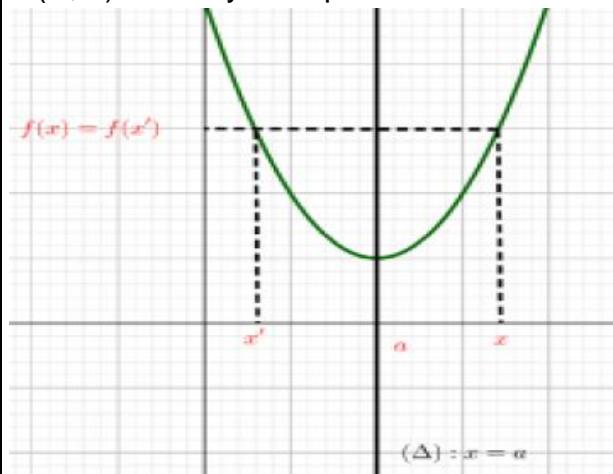
**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

La droite  $(\Delta): x = a$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

a)  $(\forall x \in D_f) (2a - x \in D_f)$

b)  $(\forall x \in D_f) (f(2a - x) = f(x))$

**Preuve :** Soit  $x$  un élément de  $D_f$  et  $A(x, 0)$ , si  $A'(x', 0)$  est le symétrique



de  $A$  par rapport à  $(\Delta): x = a$  alors

$$\frac{x + x'}{2} = a \quad (a \text{ est le centre de l'intervalle de bornes } x \text{ et } x')$$

d'où :  $x' = 2a - x$  et puisque  $(\Delta) \perp (AA')$  alors  $f(x) = f(x')$  ce qui signifie :  $f(2a - x) = f(x)$

**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** 1) On a :  $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 0$$

Tableau de signe :

$x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x - x^2$	-	0	+	0

$$\text{donc : } D_f = [0, 1]$$

2)a) montrons que : si  $x \in D_f = [0, 1]$  alors

$$1 - x \in D_f ?$$

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$$

$$\text{Donc : } x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$$

b) montrons que :  $f(1 - x) = f(x) \text{????}$

$$\begin{aligned} f(1 - x) &= \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)} \\ &= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice2:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in D_f = \mathbb{R}$  alors  $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x) \text{????}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3} - x\right) &= 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 \\ &= 3x^2 - 2x + 5 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite  $(\Delta): x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice3:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

montrer que la La droite  $(\Delta): x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

a) si  $x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  alors  $4 - x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{1; 3\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 3$$



$\Rightarrow -x \neq -1$  et  $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$  et  $4-x \neq 4-3$

$\Rightarrow 4-x \neq 3$  et  $4-x \neq 1$  alors  $4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

b) montrons que :  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$  ????

$$f(4-x) = \frac{1}{4-x-1} - \frac{1}{4-x-3} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

donc  $f(4-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

donc la droite ( $\Delta$ ):  $x = 2$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Exercice4:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \cos x$$

montrer que la La droite ( $\Delta$ ):  $x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

**Solution :** On a :  $D_f = \mathbb{R}$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$  ????

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

donc  $f(2k\pi - x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

donc la droite ( $\Delta$ ):  $x = k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$

## 2) Centre de symétrie.

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

Le point  $\Omega(a, b)$  est un centre de symétrie de la courbe  $C_f$  si et seulement si :

a)  $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b)  $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

**Preuve :**  $\Omega(a, b)$  étant centre de symétrie de la courbe  $C_f$ , si  $M(x, f(x))$  est un point de  $C_f$  alors sont symétrique  $M'$  par rapport à  $\Omega$  est un point

de  $C_f$ . soit  $M'(x', f'(x'))$  on a :  $\frac{x+x'}{2} = a$

$$\text{et } \frac{f(x) + f(x')}{2} = 2b$$

car  $a$  est le centre de l'intervalle de bornes

$x$  et  $x'$  et  $b$  est le centre de l'intervalle de bornes

$f(x)$  et  $f(x')$  Par suite :  $x' = 2a - x$  et  $f(x') = 2b - f(x)$

et finalement :  $f(2a - x) = 2b - f(x)$

**Exemple:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x + 1}$$

1) montrer que :  $\forall x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

2) montrer que le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Solution :** 1) On a :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1) + 2}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = f(x)$$

2)a) montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  alors

$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow -2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) montrons que :  $f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b$  ??

$$f(-2 - x) + f(x) = -2 - x - 2 + \frac{2}{-2 - x + 1} + x - 2 + \frac{2}{x + 1} \\ = -6 + \frac{2}{-x - 1} + \frac{2}{x + 1} = -6 - \frac{2}{x + 1} + \frac{2}{x + 1} = -6$$

$$\text{donc } f(-2 - x) + f(x) = -6 = 2b \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

donc le point  $\Omega(-1; -3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

**Exercice5 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

montrer que le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de

symétrie de  $(C_f)$

**Solution :**

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$  ??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

$$\text{donc } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc le point  $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$  est un centre de symétrie

de  $(C_f)$

**Exercice6 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de  $f$  et calculer  $f'(x)$





$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x-1)(x+1)$

$x$	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$

4) Étude de la concavité de la courbe de  $(C_f)$  ?

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3(x^2 - 1) \text{ donc } f''(x) = 6x$$

le tableau de signe de  $f''(x)$  est :

$x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\mathbb{R}_+^*$

$(C_f)$  est concave sur  $\mathbb{R}_-^*$  et  $f''(x)$  s'annule en changeant de signe 0 donc  $I(0,3)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

5) montrons que le point  $I(0;3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ?

a) on a si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que :  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  ?

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$$

$$2 \times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$$

donc  $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc le

point  $I(0,3)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $(C_f)$  en

$$I(0;3) \text{ est : } (T) : y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$$

6) du tableau de variation de  $f$

On deduit que  $f$  admet une valeur minimal en 1

sur l'intervalle  $[-1; +\infty[$  et c'est :  $f(1) = 1$

Donc :  $f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1; +\infty[$

Et l'image de l'intervalle  $]-\infty; -1]$  par  $f$  est

l'intervalle  $]-\infty; 5]$  et  $0 \in ]-\infty; 5]$  donc il existe un

$\alpha$  de  $]-\infty; -1]$  tel que  $f(\alpha) = 0$  et puisque  $f$  est

strictement croissante sur  $]-\infty; -1]$  alors quelque soit  $x \neq \alpha$  on a  $x < \alpha$  ou  $\alpha < x < -1$  donc  $f(x) < f(\alpha)$  ou  $f(\alpha) < f(x) < f(-1)$

Donc :  $f(x) < 0$  ou  $0 < f(x) \leq 5$

Donc :  $\forall x \in ]-\infty; -1] - \{\alpha\}$  on a  $f(x) \neq 0$  donc  $\alpha$  est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie que :  $f(-2.2) \approx -1.04$  et  $f(-2.1) \approx 0.03$

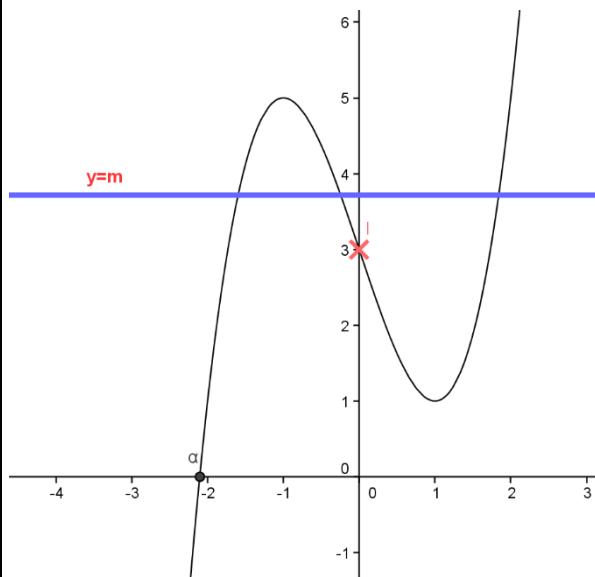
Donc d'après l'étude précédent on a alors :

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$

On deduit que :  $f(x) > 0 \quad \forall x \in ]\alpha; +\infty]$  et

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in ]-\infty; \alpha]$$

7) Tracer la courbe  $C_f$



Remarque : le signe de  $f(x)$  partir de  $(C_f)$  ?

a) sur  $]-\infty; \alpha]$   $f(x) \leq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessous de l'axe des abscisses

b) sur  $]\alpha; +\infty]$   $f(x) \geq 0$  car  $(C_f)$  est au-dessus de l'axe des abscisses

$$7) x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Les solutions de l'équation :  $f(x) = m$  sont les abscisses des points d'intersections de  $(C_f)$  avec la droite d'équation :  $y = m$

$m$	$m \in ]5; +\infty[ \cup ]-\infty; 1[$	$m=1$ ou $m=5$	$m \in ]1; 5[$
nombre de solutions	1	2	3



**Exercice8 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- 1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- 2) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$
- 3) étudier la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal
- 4) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$
- 5) déterminer les points d'intersections de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses  $f$
- 6) montrer que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$
- 7) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$  et  $x \neq 1$

donc :  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe  $(C_f)$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite  $(\Delta)$ :  $y = 2$  est une asymptote horizontale à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $\pm\infty$

$$\text{b) on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite  $(\Delta')$ :  $x = 0$  est une asymptote à la courbe  $C_f$

$$\text{c) on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite  $(\Delta'')$ :  $x = 1$  est une asymptote à la courbe  $C_f$

3) étude de la position de courbe  $(C_f)$  avec son asymptote horizontal :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

si  $x \in ]0; 1[$  alors  $f(x) - 2 > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

si  $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$  alors  $f(x) - 2 < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$ :  $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses :  $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de  $(C_f)$  avec

l'axe des abscisses sont :  $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$  et  $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$  :

On a :  $D_f = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

a) si  $x \in D_f$  alors  $1-x \in D_f$  en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

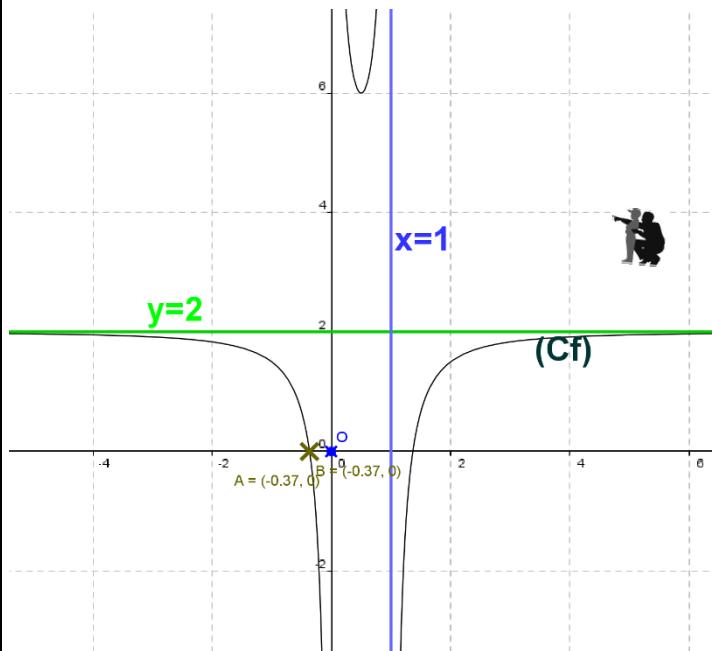
b) montrons que :  $f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$  ????

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } f(1-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

donc la droite  $x = \frac{1}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $C_f$





**Exercice9 :** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

2) déterminer les réels  $a$  et  $b$  tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3} \quad \forall x \in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$

5) montrer que le point  $\Omega(3; 4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) calculer  $f''(x) \quad \forall x \in D_f$  et étudier la concavité de la courbe de  $f$

7) étudier la position de courbe  $(C_f)$  et son asymptote oblique ( $\Delta$ )

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère

9) déterminer l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $(C_f)$  en  $x_0 = 2$

9) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$

donc :  $D_f = \mathbb{R} - \{3\} = ]-\infty; 3[ \cup ]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) on fait la division euclidienne de  $x^2 - 3x + 6$  par  $x - 3$  on trouve :  $x^2 - 2x + 1 = (x - 3)(x + 1) + 4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1) + 4}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc :  $a = 1$  et  $b = 1$  et  $c = 4$

3) Les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$

donc La droite  $x = 3$  est une asymptote à la courbe  $C_f$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

on a :  $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{+\infty} = 0$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

d)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{-\infty} = 0$

Donc : la droite  $y = x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) les variations de  $f$  et le tableau de variation ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} : f'(x) = \left( x + 1 + \frac{4}{x - 3} \right)' = 1 - \frac{4}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)^2 - 4}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 3)^2 - 2^2}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3 - 2)(x - 3 + 2)}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 3)^2}$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $(x - 5)(x - 1)$

$$(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 1$$

Le tableau de signe :

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

Le tableau de variation

$x$	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	8	$+\infty$	

5) Montrons que le point  $\Omega(3; 4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  ??



a) Montrons que si  $x \in \mathbb{R} - \{3\}$  alors

$$6-x \in \mathbb{R} - \{3\} ?$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

b) Montrons que :  $f(6-x)+f(x)=8=2b$  ?

$$\begin{aligned} f(6-x)+f(x) &= 6-x+1+\frac{1}{6-x-3}+x+1+\frac{1}{x-3} \\ &= 8+\frac{1}{-x+3}+\frac{1}{x-3}=8-\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-3}=8 \end{aligned}$$

Donc :  $\Omega(3;4)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$

6) étudie la concavité de la courbe de  $f$  ?

$$\forall x \in D_f : f'(x)=1-\frac{4}{(x-3)^2}$$

$$\text{Donc : } f''(x)=\frac{2(x-3)4}{(x-3)^4}=\frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$$

Le signe de  $f''(x)$  est celui de  $x-3$

Si  $x > 3$  ( $C_f$ ) est convexe

Si  $x < 3$  ( $C_f$ ) est concave

$$7) f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-3}$$

Si  $x > 3$  alors  $f(x)-(x+1) > 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta)$

Si  $x < 3$  alors  $f(x)-(x+1) < 0$

Donc la courbe  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta)$

8) a) intersections avec l'axe des abscisses

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-3}=0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} :$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \quad \Delta=b^2-4ac=4-4 \times 1 \times 1=0$$

$x=\frac{-b}{2a}=1$  donc le point d'intersection de la

courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses est  $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées

$$f(0)=-\frac{1}{3} \text{ donc le point d'intersection de la}$$

courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est  $C\left(0; -\frac{1}{3}\right)$

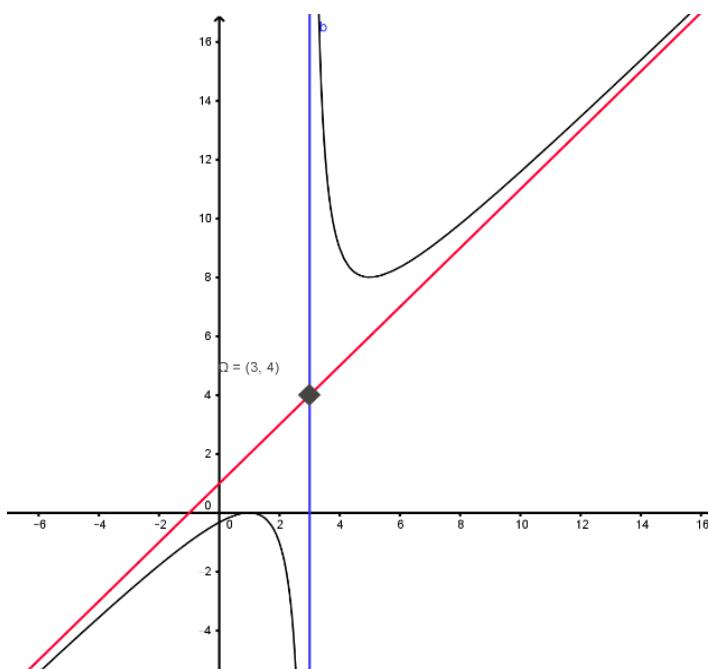
9) l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe  $(C_f)$

en  $x_0=2$  est  $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$$f'(2)=\frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2}=\frac{-3}{1}=-3 \text{ et } f(2)=\frac{2^2-2 \times 2+1}{2-3}=-1$$

$$y=f(2)+f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=-1-3(x-2) \Leftrightarrow y=-3x+5$$

9) La courbe  $(C_f)$  :



**Exercice 10:** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Déterminer les limites aux bornes de  $D_f$

3) étudier les branches infinies de la courbe  $(C_f)$

4) étudier la dérivable de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

5) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation de  $f$

6) tracer la courbe  $(C_f)$

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-x-2 \geq 0\}$

$$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4 \times 2 \times (-1)=1+8=9=(3)^2>0$$

$$x_1=-1 \text{ et } x_2=2$$

$x$	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x^2-x-2$	+	0	-	0

Donc :  $D_f = ]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

2) on a :  $\forall x \in D_f - \{0\}$

$$f(x)=\sqrt{x^2-x-2}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}$$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=1$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=+\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=+\infty$



3) étude des branches infinies de la courbe ( $C_f$ ) au voisinage de  $-\infty$  et  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = x - \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite  $y = -x + \frac{1}{2}$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$

4) étude de la dérivable de  $f$  adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe  $C_f$  admet une demi-tangente verticale aux points  $A(-1, 0)$  et  $B(2, 0)$

5) étude des variations de  $f$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$$

Donc :

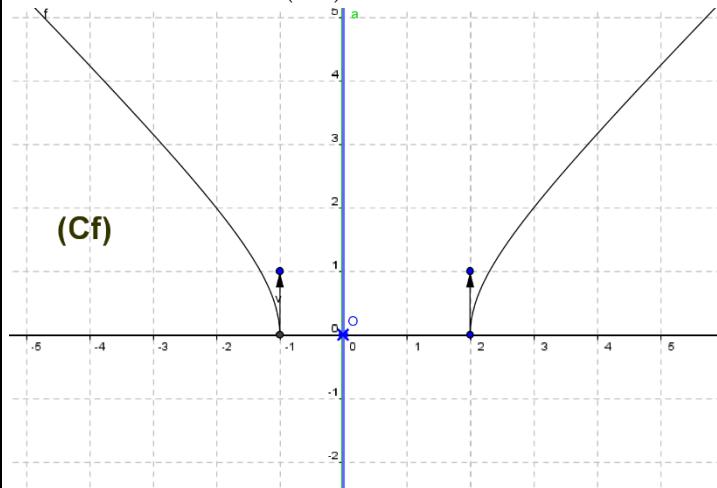
$$f'(x) = \left( \sqrt{x^2 - x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2x - 1$

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$	0	0	$+\infty$

6) tracer la courbe ( $C_f$ )



**Exercice 11:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- 1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- 2) montrer que  $f$  est périodique de période  $T = \pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$
- 3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- 4) tracer la courbe ( $C_f$ ) sur l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

**Solution :**

$$1) D_f = \mathbb{R}$$

$$2)a) \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ alors } \pi + x \in \mathbb{R}$$

b)

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = \pi$

Remarque : la fonction :  $x \rightarrow \cos(ax + b)$  est

périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$  si  $a \neq 0$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = \pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; \pi]$



3)  $f'(x)$  et le tableaux de variation de  $f$  ?

$f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en deduit le signe de

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Le tableau de signe de  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  est :

$2x + \frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$
$\sin(2x + \frac{\pi}{4})$	+	0	-	0

le tableau de variation de  $f$  :

$x$	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	$\pi$
$f'(x)$	-	0	+	0
$f(x)$	$\sqrt{2}$	-2	2	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de  $f$  : on deduit que

Que  $f$  change de signe en sur les intervalles  $[0; \frac{3\pi}{8}]$  et  $[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}]$  cad  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans  $I = [0; \frac{7\pi}{8}]$  l'équation :

$$f(x) = 0$$

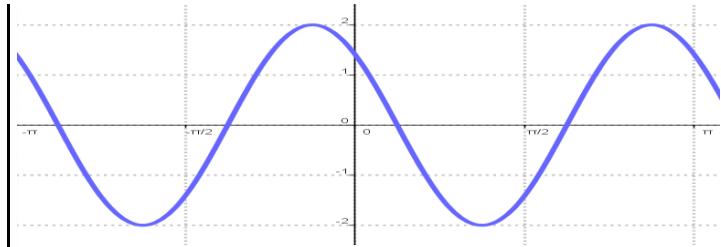
$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle

$$D_E = [0; \pi]$$

Et on deduit le reste par les translations de vecteurs  $k\pi i$   $k \in \mathbb{Z}$



**Exercice 12:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = 4 \sin x + \cos 2x$$

- 1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$
- 2) montrer que  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$  et en déduire le domaine d'étude de  $f$
- 3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableaux de variation de  $f$
- 4) donner l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe de  $f$  en en  $x_0 = 0$

- 5) calculer  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$

- 6) déterminer les points d'inflexions de la courbe  $(C_f)$

- 7) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$

2)a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(2\pi + x) = 4 \sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$$

$$f(2\pi + x) = 4 \sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de  $f$

il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = 2\pi$

donc par exemple :  $D_E = [0; 2\pi]$

$f$  est dérivable sur  $D_E = [0; 2\pi]$  et  $\forall x \in D_E$  on a :

$$f'(x) = 4 \cos x - 2 \sin(2x) = 4 \cos x - 4 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = 4 \cos x (1 - \sin x)$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On a :  $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x (1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ Donc :}$$



$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	1	3	-5	1

4) l'équation de la tangente ( $T$ ) à la courbe de  $f$  en  $x_0 = 0$  est :  $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

Avec :  $f'(0) = 4$  et  $f(0) = 1$  donc :  $y = 4x+1$

5) calcule de  $f''(x)$  en fonction de  $\sin x$  :

On a  $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$

**Donc :**  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de  $f''(x)$  sur  $D_E = [0; 2\pi]$

On pose :  $X = \sin x$  donc :  $X \in [-1; 1]$  et l'équation  $\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$  devient :  $X^2 - X - 1 = 0$

$$\Delta = 9 \text{ les solutions sont : } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1$$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8\left(\sin x - 1\right)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

On a :  $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigonométrique on déduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

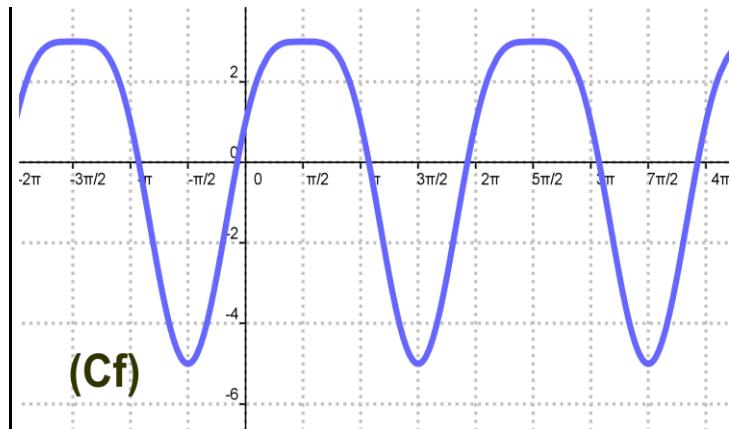
$x$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$f''(x)$	-	0	+	0

Donc :  $(C_f)$  est convexe sur  $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

$(C_f)$  est concave sur  $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$  et  $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et  $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$  sont les points d'inflexions de  $(C_f)$

7) La courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$



**Exercice 13:** soit  $f$  une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1) déterminer  $D_f$  ensemble de définition de  $f$

2) montrer qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[0; \pi]$

3) déterminer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$

4) tracer la courbe  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-2\pi; 2\pi]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$  car  $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de  $f$

a) si  $x \in \mathbb{R}$  alors  $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc :  $f$  est périodique de période  $T = 2\pi$   
il suffit d'étudier  $f$  sur un intervalle de longueur  $T = 2\pi$  donc par exemple :  $D = [-\pi; \pi]$

Etudions la parité de  $f$  ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

Donc  $f$  est impaire

Donc il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = [0; \pi]$

3)  $f$  est dérivable sur  $D_E = [0; \pi]$  et  $\forall x \in D_E$  on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

Etude du signe de  $f'(x)$  sur  $D_E = [0; \pi]$

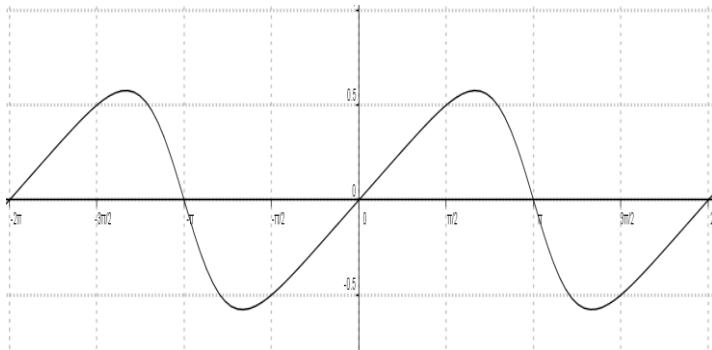
Le signe de  $f'(x)$  est celui de :  $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$



$x$	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



## Autre exercices

**Exercice1 :** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 1$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
3. Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

**Exercice2 :** Soit  $g$  la fonction définie par :

$$g(x) = \frac{2x^2 - x}{x - 1}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition  $D_g$ .

2. Déterminer les limites aux bornes de  $D_g$

3. Effectuer la division de

$$P(x) = 2x^2 - x \text{ sur } (x - 1)$$

puis en déduire que ( $\forall x \in Dg$ )  $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x - 1}$

4. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (2x + 1)$

On dit que la droite ( $\Delta$ ):  $y = 2x + 1$  est une asymptote oblique à la courbe  $C_g$  au voisinage de  $+\infty$

**Exercice3 :** Soit la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $h$  et étudier sa parité.
2. Etudier les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$
3. Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $h$  et dresser le T.V
4. Déterminer l'équation de la tangente en  $O(0,0)$
5. Etudier les positions relatives de  $T$  et la courbe
6. Tracer la courbe  $C_f$

**Exercice4 :** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  
 $f(x) = x - E(x)$

1. Tracer la courbe de la fonction  $f$  sur  $[0,2]$ .
2. Etudier la limite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
3. Que remarquer vous ?

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron »**

**Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

