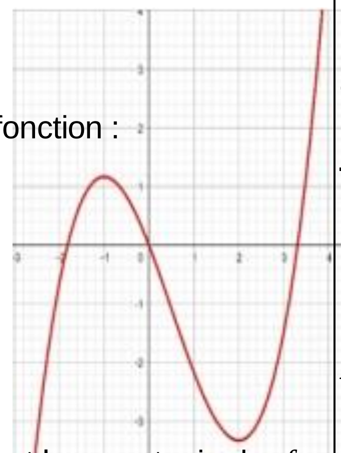
Cours *LA DERIVATION (APPLICATIONS)*
Avec **Exercices avec solutions**
PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LA DERIVATION -APPLICATIONS

I) Activité

La courbe ci-contre est la courbe de la fonction :

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$



1)Déterminer graphiquement la monotonie de f suivant desintervalles de $\mathbb{R}$

2)Dresser le tableau de variations de f

3)déterminer f' la fonction dérivée de f

4)Trouver une relation entre le signe de f' et sa monotonie

II) DERIVATION ET MONOT ONIE D'UNE FONCTION

Rappelle **:**Si g est une fonction positive sur un intervalle I, alors $(\forall a\in I)\lim\limits_{x\to a} g(x)\geq 0$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
1) Si f est croissante sur I alors f'est positive sur I.
2) Si f est décroissante sur I alors f'est négative sur I.
3) Si f est constante sur I alors f' est nulle sur I.

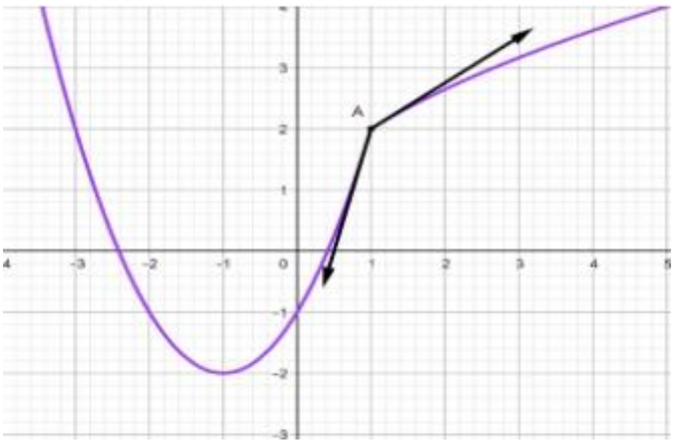
Preuve :
On suppose que f est dérivable sur I et que f est croissante sur I. Posons $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

g est positive sur I(c'est le taux d'accroissement entre x et a d'une fonction croissante).
En passant à la limite et d'après le rappelle

$(\forall a\in I)\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\geq 0$

d'où $(\forall a\in I)\ f'(a)\geq 0$ donc f' est positive sur I.

Remarque : Si f est dérivable et strictement croissante, on ne peut pas conclure que f' est strictement positive.
Exemple :
$f(x)=x^3$; on a f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa fonction dérivée qui est $f'(x)=3x^2$ n'est pas trictement positive sur $\mathbb{R}$, elle s'annule en 0.
2. Une fonction croissante sur I ne vérifie pas toujours la condition $f'\geq 0$ sur I
Soit f dont le courbe représentative est ci-contre, on a :
f est croissante sur $[-1,4]$ mais elle n'est même pas dérivable sur $[-1,4]$ car elle n'est pas dérivable en 1.$(f_d'(1)\neq f_g'(1))$



III) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété :Soit fune fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

Preuve : On suppose que f admet un extremum relatif en a donc :
(on suppose que c'est un maximum reltif)

$(\exists r\succ 0)(\forall x\in]a-r;a+r[);\ f(x)\leq f(a)$

D'où : $(\forall x\in]a-r;a[);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geq 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)\geq 0$

D'autre part : $(\forall x\in]a;a+r[);\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leq 0$

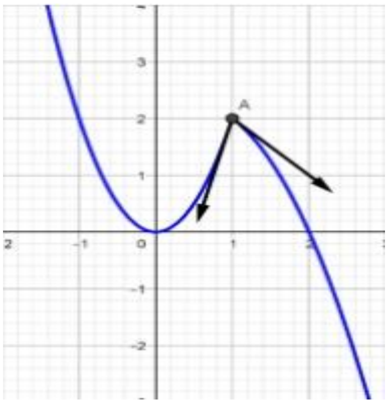
Donc : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)\leq 0$

puisque f est dérivable en a alors

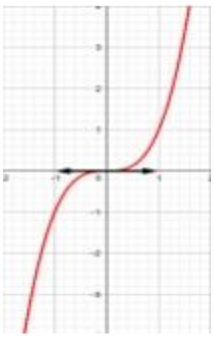
$f'_d(a)=f'_g(a)=f'(a)$ donc : $f'(a)\geq 0$ et

$f'(a)\leq 0$ Finalement: $f'(a)=0$

Remarque :1) Une fonction peut admettre un extremum relatif sans qu'elle vérifie la condition $f'(a)=0$. Sur la figure ci-contre f admet un maximum relatif en 1 et f n'est même dérivable en 1.



2)La réciproque de la propriété précédente est fausse ; $f(x)=x^3$ on a f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f'(x)=3x^2$ et donc $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.
(Courbe ci-contre)



Propriété : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a,\ f(a))$

Preuve : Puisque f est dérivable en a et admet un extremum en a alors $f'(a)=0$

et donc C_f admet une tangente (T) en $A(a,\ f(a))$ d'équation :

(T): $y=0(x-a)+f(a)$

(T): $y=f(a)$

(T) est donc parallèle à l'axe de abscisses

Propriété : (Admise)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

1) Si f' est positive sur I alors f est croissante sur I.

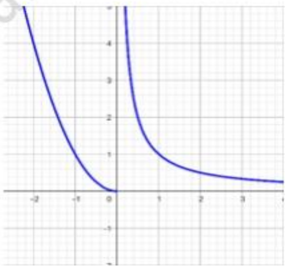
2) Si f' est négative sur I alors f est décroissante sur I.

3) Si f' est nulle sur I alors f est constante sur I.

Remarque :

Le faite que I est un intervalle est nécessaire.
sur la figure ci-contre on a :
$(\forall x\in\mathbb{R}^*)(f'(x)<0)$
Mais on ne peut pas dire f décroissante sur $\mathbb{R}^*$
car $f(-2)=4>f(1)=1$
Cette fonction est définie comme suite :

$$\begin{cases} f(x)=x^2 \ldots x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{1}{x}\ldots x\succ 0\end{cases}$$



Propriété : Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

Exemple1 :$f(x)=x^3$

Sa fonction dérivée est $f'(x)=3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$
et s'annule en 0, on peut dire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Remarquer que pour cette fonction $f'(0)=0$ et pourtant f n'admet pas d'extremum relatif en 0.

Exemple2 : $f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-6}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-6}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-6)-(4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-6)-2\times(4x-3)}{(2x-6)^2}=\frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2}=\frac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$$

Donc : $\forall x\in\mathbb{R}-\{3\}\quad f'(x)=\dfrac{-18}{(2x-6)^2}\prec 0$

Donc f est strictement décroissante sur les intervalles. $]1;+\infty[$ et $]-\infty;1[$

Exemple3 : Soit $f(x)=x\sqrt{x^2-x}$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$\forall x\in D_f-\{0;1\}$:

$$f'(x)=\left(x\sqrt{x^2-x}\right)'=x'\sqrt{x^2-x}+x\frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$f'(x)=\sqrt{x^2-x}+x\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{4x^2-3x}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2-x}\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{0;1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2-3x$

Le tableau de signe de : $4x^2-3x$ est :

x	$-\infty$		0		$3/4$		$+\infty$
$4x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a : $f'(x)\succ 0\quad \forall x\in]1;+\infty[$ et $\forall x\in]-\infty;0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3;+\infty[$

et sur $]-\infty;0[$

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a\in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

Exemple : Soit $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f=\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)=x^2+x-2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de x^2+x-2

$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0$

$\Delta=9$ deux solutions : $x_1=1$ et $x_2=-2$

Donc voici le tableau de variation de f :

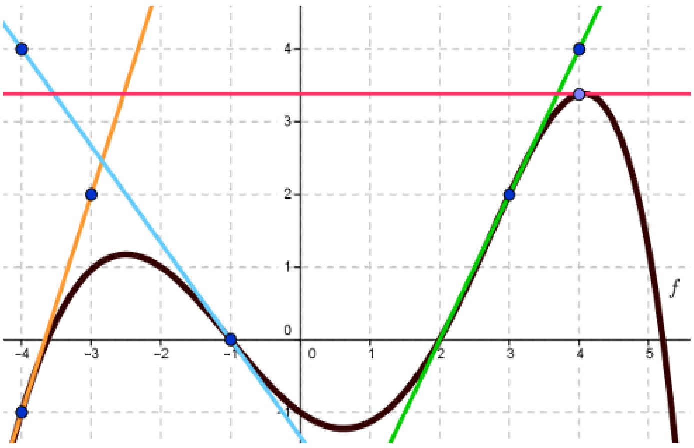
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$10/3$	$\searrow$	$-7/6$	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2

Exercice 1: On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ représentée par sa courbe C en noire ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

1)Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$;

$f(-1)$; $f'(-1)$; $f(3)$; $f'(4)$

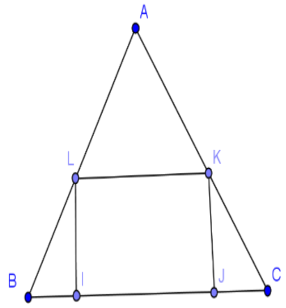
2) Déterminer le signe de $f'(3)$ et $f'(5)$

solution :1) $f(-4)=-1$; $f'(-4)=3$

$f(-1)=0$; $f'(-1)=-\frac{4}{3}$; $f(3)=2$; $f'(4)=0$

2) $f'(3)\succ 0$ et $f'(5)\prec 0$

Exercice2 : soit ABC un Triangle équilatéral et la longueur de son côté est a
On construit à l'intérieur un rectangle $IJKL$
(Voir la figure)
on pose $CI=BJ=x$
1) Déterminer l'intervalle qui contient x
2)Déterminer la valeur de x pour que la surface du rectangle $IJKL$ soit maximal



Solution :1)On a : $0\prec CI+BJ\prec CB$ donc $0\prec 2x\prec a$

donc $0\prec x\prec \frac{a}{2}$ donc $x\in \left]0;\frac{a}{2}\right[$

2)cherchons la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$?

$S(x)=IJ\times IL$ on a : $IJ=a-2x$

Calculons : IL ?? soit H la projection orthogonal de A sur (BC)

On a H est le milieu de $[BC]$(car ABC un Triangle équilatéral) et sur le Triangle AHC on a $I\in(HC)$

Et $L\in(CA)$ et $(IL)\|(HA)$ d'après thalles on a :

$\frac{CI}{CH}=\frac{IL}{AH}$ et on a : $CH=\frac{a}{2}$ et $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ et

$CI=x$ donc : $IL=\sqrt{3}x$

$\forall x\in\left]0;\frac{a}{2}\right[$ $S(x)=\sqrt{3}x(a-2x)=-2\sqrt{3}x^2+a\sqrt{3}x$

la fonction S est dérivable sur $\left]0;\frac{a}{2}\right[$ et on a :

$S'(x)=-4\sqrt{3}x+a\sqrt{3}$ $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{4}$

Donc voici le tableau de variation de S :

x	0		$\frac{a}{4}$		$a/2$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$\searrow$	0

la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$ est maximal si et seulement si $x=\frac{a}{4}$ et la surface maximal est :

$S_{\max}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

IV) DERIVEES SUCCESSIVES.

Définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable on dit que la fonction f est deux fois dérivable et $(f')'$ s'appelle la dérivée seconde de la fonction f.
En générale on définit (sous réserve d'existence) les dérivées successives sur un intervalle ouvert I par :L'initialisation : $f^{(0)}=f$
et la formule de récurrence $(\forall n\in\mathbb{N})(f^{(n+1)}=(f^{(n)})'$
Exemple : montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}$

$\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Solution : raisonnement par récurrence

Pour n=1 $\cos^{(1)}x=\cos' x=-\sin x=\cos\left(x+1\frac{\pi}{2}\right)$

Supposons que : $\cos^{(n)}x=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que : $\cos^{(n+1)}x=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$?

$\cos^{(n+1)}x=\left(\cos^{(n)}x\right)'=\left(\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right)'=-\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

V) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

On s'intéresse à l'équation (E): $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle (E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions :

$y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

Il existe une seul solution g de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $g(x_0) = y_0$

et $g'(x_0) = z_0$ où x_0, y_0 et z_0 sont des réels

Exemple : soit l'équation différentielle

(E) : $y'' + 4y = 0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$

solution : $(w = 2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a\cos 2x + b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc : $F(x) = \cos 2x + \sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice3 : Soient les fonctions suivantes :

1) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ 2) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$

3) $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en $1/3$ en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en $1/3$

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur minimal absolue

c'est $2/3$ en $1/3$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2/3$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en $x=1$ alors la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et g n'admet pas d'extremums

3) $h(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$ $\quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$$\forall x \in D_h \ : \ h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$$

Puisque: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ $\dfrac{3}{(x-1)^2} \succ 0$ Le signe de $h'(x)$ est le signe de $\dfrac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$h(x)$	-1	$\nearrow$	$-1/4$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

h′ s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1

Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative

c'est $-\frac{1}{4}$ en -1

Exercice 4: Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$I_1 =]-\infty;1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2 = \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

et bornée sur l'intervalle : $I_3 = \left[-\dfrac{1}{2};1\right]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$7/4$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ en deduit que f Admet une valeur maximal en $-\dfrac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\dfrac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1 \ : \ f(x) \leq \dfrac{7}{4}$ donc que f est majorée sur l'intervalle : $I_1 =]-\infty;1]$ par $\dfrac{7}{4}$

- f est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2};1\right]$ et croissante sur $[1;+\infty[$ en deduit que f Admet une valeur minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2 \ : -5 \leq f(x)$ donc que f est minorée sur l'intervalle : I_2 par -5

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien