

LA DERIVATION -APPLICATIONS

Exercice 1: Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-6}$$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$f'(x) = \left(\frac{4x-3}{2x-6} \right)' = \frac{(4x-3)'(2x-6) - (4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-6) - 2 \times (4x-3)}{(2x-6)^2} = \frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{(2x-6)^2} < 0$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \quad f'(x) = \frac{-18}{(2x-6)^2} < 0$

Donc f est strictement décroissante sur les intervalles. $]1; +\infty[$ et $]-\infty; 1[$

Exercice 2: Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$$

Etudier les variations de la fonction f

Solution : $D_f =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a : $f(x) = x\sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 - x$

Et on a : $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f - \{0; 1\}$

$\forall x \in D_f - \{0; 1\} :$

$$f'(x) = (x\sqrt{x^2 - x})' = x'\sqrt{x^2 - x} + x \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque : $2\sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de : $4x^2 - 3x$ est :

x	$-\infty$	0	$3/4$	$+\infty$
$4x^2 - 3x$	$+$	0	$-$	$+$

On a : $f'(x) > 0 \quad \forall x \in]1; +\infty[$ et $\forall x \in]-\infty; 0[$

donc f est strictement croissante sur $]4/3; +\infty[$

et sur $]-\infty; 0[$

Exercice 3: Soit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extremums de la fonction f

Solution : $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $x^2 + x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$\Delta = 9$ deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = -2$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$10/3$	$-7/6$	$+\infty$

Du tableau de variation de f en déduit que :

f admet une valeur minimal relatif c'est $-7/6$ en 1

f admet une valeur maximal relatif c'est $10/3$ en -2



Exercice 4: On considère une fonction f dérivable sur \mathbb{R} représentée par sa courbe C en noire ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

1) Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$;

$f(-1)$; $f'(-1)$; $f(3)$; $f'(4)$

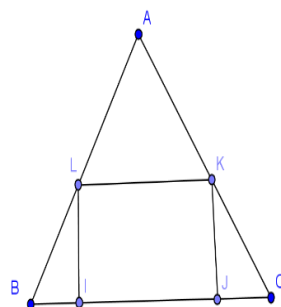
2) Déterminer le signe de $f'(3)$ et $f'(5)$

solution : 1) $f(-4) = -1$; $f'(-4) = 3$

$f(-1) = 0$; $f'(-1) = -\frac{4}{3}$; $f(3) = 2$; $f'(4) = 0$

2) $f'(3) > 0$ et $f'(5) < 0$

Exercice 5 : soit ABC un Triangle équilatéral et la longueur de son côté est a
On construit à l'intérieur un rectangle $IJKL$
(Voir la figure)
on pose $CI = BJ = x$



1) Déterminer l'intervalle qui contient x

2) Déterminer la valeur de x pour que la surface du rectangle $IJKL$ soit maximal

Solution : 1) On a : $0 < CI + BJ < CB$ donc $0 < 2x < a$

donc $0 < x < \frac{a}{2}$ donc $x \in \left] 0; \frac{a}{2} \right[$

2) cherchons la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$?

$S(x) = IJ \times IL$ on a : $IJ = a - 2x$

Calculons : IL ?? soit H la projection orthogonal de A sur (BC)

On a H est le milieu de $[BC]$ (car ABC un Triangle équilatéral) et sur le Triangle AHC on a $I \in (HC)$

Et $L \in (CA)$ et $(IL) \parallel (HA)$ d'après thalès on a :

$$\frac{CI}{CH} = \frac{IL}{AH} \text{ et on a : } CH = \frac{a}{2} \text{ et } AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ et}$$

$$CI = x \text{ donc : } IL = \sqrt{3}x$$

$$\forall x \in \left] 0; \frac{a}{2} \right[\quad S(x) = \sqrt{3}x(a - 2x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x$$

la fonction S est dérivable sur $\left] 0; \frac{a}{2} \right[$ et on a :

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3} \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Donc voici le tableau de variation de S :

x	0	$\frac{a}{4}$	$a/2$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	0

la surface $S(x)$ du rectangle $IJKL$ est maximal si

et seulement si $x = \frac{a}{4}$ et la surface maximal est :

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

Exercice 6: montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^{(n)} x = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

Solution : raisonnement par récurrence

$$\text{Pour } n=1 \quad \cos^{(1)} x = \cos' x = -\sin x = \cos \left(x + 1 \frac{\pi}{2} \right)$$



Supposons que : $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que : $\cos^{(n+1)} x = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$?

$$\begin{aligned}\cos^{(n+1)} x &= \left(\cos^{(n)} x\right)' = \left(\cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(x + n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercice 7: soit l'équation différentielle

(E) : $y'' + 4y = 0$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution g qui vérifie :

$$g(0) = 1 \text{ et } g'(0) = 2$$

solution : (w=2) 1) la solution générale de

l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$ où α et β sont des réels

$$2) F'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exercice 8 : Soient les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad 2) g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	+
f(x)	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

f' s'annule en $\frac{1}{3}$ en changeant de signe à droite

et à gauche alors f admet un extremum en $\frac{1}{3}$

Du tableau de variation de f en déduit que :

f Admet une valeur minimal absolue

c'est $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$ donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{2}{3}$

1) $D_g = \mathbb{R}$ g est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Puisque : $g'(x) \geq 0$ et g s'annule seulement en

$x = 1$ alors la fonction g est strictement croissante sur \mathbb{R} et g n'admet pas d'extremums

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur D_h

$$\forall x \in D_h : h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$$



Puisque: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \quad \frac{3}{(x-1)^2} > 0$ Le signe de $h'(x)$

est le signe de $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de h :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	+
$h(x)$	-1	$-1/4$	$-\infty$	$-\infty$

h' s'annule en -1 en changeant de signe à droite et à gauche alors f admet un extremum en -1
Du tableau de variation de f en deduit que :

f Admet une valeur maximal relative

c'est $-1/4$ en -1

Exercice 9: Soit la fonction : $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que f est majorée sur l'intervalle :

$I_1 =]-\infty; 1]$ et minorée sur l'intervalle : $I_2 = [-\frac{1}{2}; +\infty[$ et

bornée sur l'intervalle : $I_3 = [-\frac{1}{2}; 1]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ f est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R}

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$$

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$-1/2$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$7/4$	-5	$+\infty$

Du tableau de variation de f on a :

- f est croissante sur $]-\infty; -\frac{1}{2}]$ et décroissante

sur $[-\frac{1}{2}; 1]$ en deduit que f Admet une valeur

maximal en $-\frac{1}{2}$ sur I_1 c'est $\frac{7}{4}$ donc :

$\forall x \in I_1 : f(x) \leq \frac{7}{4}$ donc que f est majorée sur

l'intervalle : $I_1 =]-\infty; 1]$ par $\frac{7}{4}$

- f est décroissante sur $[-\frac{1}{2}; 1]$ et croissante

sur $[1; +\infty[$ en deduit que f Admet une valeur

minimal en 1 sur I_2 c'est -5 donc :

$\forall x \in I_2 : -5 \leq f(x)$ donc que f est minorée sur

l'intervalle : I_2 par -5

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien

