

## **LA DERIVATION -APPLICATIONS**

**Exercice 1:** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-6}$$

Etudier les variations de la fonction  $f$

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

Puisque  $f$  est une fonction rationnelle alors il dérivable sur  $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$f'(x) = \left( \frac{4x-3}{2x-6} \right)' = \frac{(4x-3)'(2x-6) - (4x-3)(2x-6)'}{(2x-6)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(2x-6) - 2 \times (4x-3)}{(2x-6)^2} = \frac{8x-24-8x+6}{(2x-6)^2} = \frac{-18}{(2x-6)^2} < 0$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} \quad f'(x) = \frac{-18}{(2x-6)^2} < 0$$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur les intervalles.  $]1; +\infty[$  et  $]-\infty; 1[$

**Exercice 2:** Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - x}$$

Etudier les variations de la fonction  $f$

**Solution :**  $D_f = ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$

On a :  $f(x) = x\sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = x^2 - x$

Et on a :  $u(x) > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Donc  $f$  est dérivables sur  $D_f - \{0; 1\}$

$\forall x \in D_f - \{0; 1\}$  :

$$f'(x) = \left( x\sqrt{x^2 - x} \right)' = x'\sqrt{x^2 - x} + x \frac{(x^2 - x)'}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2 - x} + x \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2 - x}} = \frac{4x^2 - 3x}{2\sqrt{x^2 - x}}$$

Puisque :  $2\sqrt{x^2 - x} > 0 \quad \forall x \in D_f - \{0; 1\}$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $4x^2 - 3x$

Le tableau de signe de :  $4x^2 - 3x$  est :

$x$	$-\infty$	$0$	$3/4$	$+\infty$
$4x^2 - 3x$	+	0	-	0

On a :  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]1; +\infty[$  et  $\forall x \in ]-\infty; 0[$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $]4/3; +\infty[$

et sur  $]-\infty; 0[$

**Exercice 3:** Soit  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

Etudier les extreums de la fonction  $f$

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x^2 + x - 2$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $x^2 + x - 2$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$\Delta = 9$  deux solutions :  $x_1 = 1$  et  $x_2 = -2$

Donc voici le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$10/3$	$-7/6$	$+\infty$

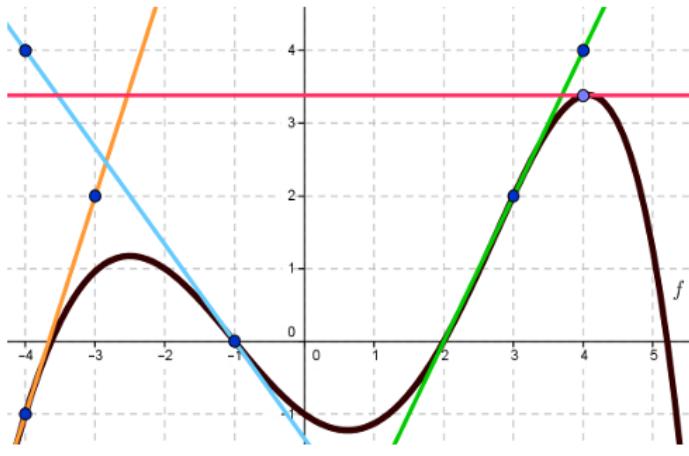
Du tableau de variation de  $f$  en deduit que :

$f$  admet une valeur minimal relatif c'est  $-\frac{7}{6}$  en 1

$f$  admet une valeur maximal relatif c'est  $\frac{10}{3}$  en -2



**Exercice 4:** On considère une fonction  $f$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  représentée par sa courbe  $C$  en noir ci-dessous.



On a également tracé les tangentes à la courbe de  $f$  aux points d'abscisses  $-4, -1, 3$  et  $4$ .

1) Déterminer graphiquement  $f(-4)$ ,  $f'(-4)$  ;

$$f(-1) ; f'(-1); f(3) ; f'(4)$$

2) Déterminer le signe de  $f'(3)$  et  $f'(5)$

**solution :** 1)  $f(-4) = -1$  ;  $f'(-4) = 3$

$$f(-1) = 0 ; f'(-1) = -\frac{4}{3} ; f(3) = 2 ; f'(4) = 0$$

2)  $f'(3) > 0$  et  $f'(5) < 0$

**Exercice 5 :** soit  $ABC$  un triangle équilatéral et la longueur de son côté est  $a$ . On construit à l'intérieur un rectangle  $IJKL$

(Voir la figure)

on pose  $CI = BJ = x$

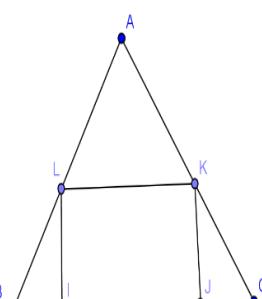
1) Déterminer l'intervalle qui contient  $x$

2) Déterminer la valeur de  $x$  pour que la surface du rectangle  $IJKL$  soit maximal

**Solution :** 1) On a :  $0 < CI + BJ < CB$  donc  $0 < 2x < a$

$$\text{donc } 0 < x < \frac{a}{2} \text{ donc } x \in \left]0; \frac{a}{2}\right[$$

2) cherchons la surface  $S(x)$  du rectangle  $IJKL$  ?



$$S(x) = IJ \times IL \text{ on a : } IJ = a - 2x$$

Calculons :  $IL$  ?? soit  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur  $(BC)$

On a  $H$  est le milieu de  $[BC]$  (car  $ABC$  un triangle équilatéral) et sur le Triangle  $AHC$  on a  $I \in (HC)$

Et  $L \in (CA)$  et  $(IL) \parallel (HA)$  d'après thalles on a :

$$\frac{CI}{CH} = \frac{IL}{AH} \text{ et on a : } CH = \frac{a}{2} \text{ et } AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{ et}$$

$$CI = x \text{ donc : } IL = \sqrt{3}x$$

$$\forall x \in \left]0; \frac{a}{2}\right[ \quad S(x) = \sqrt{3}x(a - 2x) = -2\sqrt{3}x^2 + a\sqrt{3}x$$

la fonction  $S$  est dérivable sur  $\left]0; \frac{a}{2}\right[$  et on a :

$$S'(x) = -4\sqrt{3}x + a\sqrt{3} \quad S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a}{4}$$

Donc voici le tableau de variation de  $S$  :

$x$	$0$	$\frac{a}{4}$	$a/2$
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$	$0$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{8}$	$0$

la surface  $S(x)$  du rectangle  $IJKL$  est maximal si

et seulement si  $x = \frac{a}{4}$  et la surface maximal est :

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

**Exercice 6:** montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^{(n)} x = \cos \left( x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

**Solution :** raisonnement par récurrence

$$\text{Pour } n=1 \quad \cos^{(1)} x = \cos' x = -\sin x = \cos \left( x + 1 \frac{\pi}{2} \right)$$



Supposons que :  $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$

Montrons que :  $\cos^{(n+1)} x = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$  ?

$$\cos^{(n+1)} x = (\cos^{(n)} x)' = \left(\cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)\right)' = -\sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(x + n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + (n+1) \frac{\pi}{2}\right)$$

**Exercice 7:** soit l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 4y = 0$$

1) Résoudre l'équation différentielle (E)

2) Déterminer la solution g qui vérifie :

$$g(0)=1 \text{ et } g'(0)=2$$

**solution :** (w=2) 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction :  $F(x) = a \cos 2x + b \sin 2x$  où  $a$  et  $b$  sont des réels

$$2) F'(x) = -2a \sin 2x + 2b \cos 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F'(0) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \cos 2x + \sin 2x$$

On peut écrire  $F(x)$  sous la forme :

$$F(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

**Exercice 8 :** Soient les fonctions suivantes :

$$1) f(x) = 3x^2 - 2x + 1 \quad 2) g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 1$$

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

Etudier les variations de ces fonctions et déterminer les extremums s'ils existent

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$  f est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6x - 2 = 2(3x - 1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $3x - 1$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

Donc voici le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$

$f'$  s'annule en  $\frac{1}{3}$  en changeant de signe à droite

et à gauche alors  $f$  admet un extremum en  $\frac{1}{3}$

Du tableau de variation de f on deduit que :

$f$  Admet une valeur minimal absolue

c'est  $\frac{2}{3}$  en  $\frac{1}{3}$  donc :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq \frac{2}{3}$

1)  $D_g = \mathbb{R}$  g est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Puisque :  $g'(x) \geq 0$  et g s'annule seulement en  $x=1$  alors la fonction g est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et g n'admet pas d'extremums

$$3) h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2} \quad x \in D_h \Leftrightarrow x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$$

$$D_h = \mathbb{R} - \{1\} = ]-\infty; 1[ \cup ]1; +\infty[$$

Puisque h est une fonction rationnelle alors il dérivable sur  $D_h$

$$\forall x \in D_h : h'(x) = \frac{(2x+1)'(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)(x-1)'}{(x-1)^4}$$

$$h'(x) = \frac{3(x+1)}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^2} \times \frac{x+1}{x-1}$$



Puisque:  $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$   $\frac{3}{(x-1)^2} > 0$  Le signe de  $h'(x)$  est le signe de  $\frac{x+1}{x-1}$

Donc voici le tableau de variation de  $h$ :

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	+
$h(x)$	$-1$	$-1/4$	$-\infty$	$-\infty$

$h'$  s'annule en  $-1$  en changeant de signe à droite et à gauche alors  $f$  admet un extremum en  $-1$ . Du tableau de variation de  $f$  en deduit que :

$f$  Admet une valeur maximal relative

c'est  $-\frac{1}{4}$  en  $-1$

**Exercice 9:** Soit la fonction :  $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$

Montrer que  $f$  est majorée sur l'intervalle :

$I_1 = ]-\infty; 1]$  et minorée sur l'intervalle :  $I_2 = \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$  et bornée sur l'intervalle :  $I_3 = \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$

**Solution :** 1)  $D_f = \mathbb{R}$   $f$  est une fonction polynôme donc dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 6(2x^2 - x - 1) = 6(x-1)(2x+1)$$

Le signe de  $f'(x)$  est le signe de  $(x-1)(2x+1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}$$

Donc voici le tableau de variation de  $f$ :

$x$	$-\infty$	$-1/2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	$7/4$	$-5$	$+\infty$

Du tableau de variation de  $f$  on a :

- $f$  est croissante sur  $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$  et décroissante

sur  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$  en deduit que  $f$  Admet une valeur maximal en  $-\frac{1}{2}$  sur  $I_1$  c'est  $\frac{7}{4}$  donc :

$\forall x \in I_1 : f(x) \leq \frac{7}{4}$  donc que  $f$  est majorée sur

l'intervalle :  $I_1 = ]-\infty; 1]$  par  $\frac{7}{4}$

- $f$  est décroissante sur  $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$  et croissante

sur  $[1; +\infty[$  en deduit que  $f$  Admet une valeur minimal en 1 sur  $I_2$  c'est  $-5$  donc :

$\forall x \in I_2 : -5 \leq f(x)$  donc que  $f$  est minorée sur

l'intervalle :  $I_2$  par  $-5$

« *C'est en forgeant que l'on devient forgeron* »  
*Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement*

*Aux calculs et exercices Que l'on devient*

*Un mathématicien*

