

## I. Rappel :

### 1. Coefficient directeur et vecteur directeur d'une droite :

On considère la droite  $(AB)$  passant  $A(1,2)$  et  $B(3,6)$ .

- Le coefficient directeur est :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{3-1} = 2$ .

- Vecteur directeur est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- Équation cartésienne de  $(AB)$  est de la forme

$$(AB) : y = m(x - x_A) + y_A$$

- (aussi  $(AB) : y = m(x - x_B) + y_B$ . d'où équation cartésienne de  $(AB)$  est  $(AB) : y = 2(x - 1) + 2 = 2x$  ou encore :  $(AB) : y = 2(x - 3) + 6 = 2x$ .

### 2. Vitesse moyenne :

- Lorsque la vitesse  $d$  parcourue par solide en mouvement est exprimée en fonction du temps  $t$ . on a la distance  $d$  parcourue par ce solide à l'instant  $t$  est  $d(t) = f(t)$ .
- La vitesse moyenne c'est la vitesse du solide entre l'instant  $t_1$  et  $t_2$  est

$$V_m[t_1, t_2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

- Exemple :

On suppose que la distance traversée par un solide en mouvement est exprimée en fonction du temps  $t$  est  $d(t) = f(t) = 10t^2$  tel que  $d$  est exprimée en km et  $t$  en h (heure).

On calcule la vitesse moyenne du solide entre  $t_1 = 1h$  et  $t_2 = 2h$  on a

$$V_m[t_1, t_2] = V_m[1, 2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{40 - 10}{1} = 30 \text{ km/h}.$$

Remarque :

❖ Les physiciens exprime les variation par  $\Delta$ .

Exemple :

- les variations entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  est  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

- Les variations entre les ordonnées est  $y_1 = f(x_1)$  et  $y_2 = f(x_2)$  est  $\Delta y = y_2 - y_1$ .

❖ Les petites variations sont exprimées par  $d$ .

Exemple :

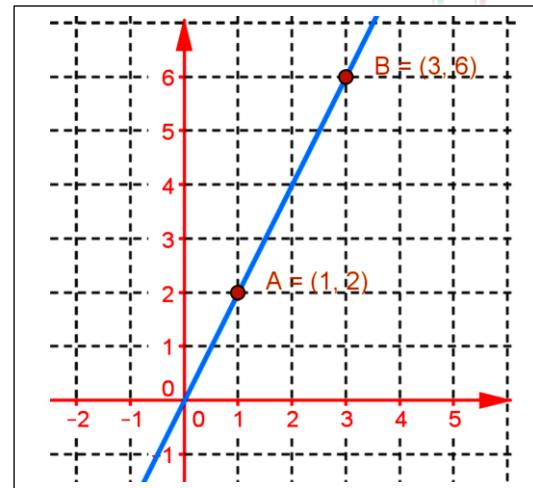
- On considère  $x_2 = x_1 + h$  donc  $\Delta x = h$  et on considère  $h$  tends vers 0 dans ce cas on écrit  $dx$  au lieu de  $\Delta x$ .

### 3. Approche :

❖ Approche n° 1 :

➤ Un athlète parcourt une distance de 5 km en 10 minutes. que représente la grandeur 30 km/h pour l'athlète ?

➤ 30 minutes était suffisante pour remplir un réservoir de volume 3 m<sup>3</sup> que représente la grandeur 100 l/min ?



- Une voiture a parcouru une distance de 200 km pendant deux heures .  
que représente la grandeur 100 km / h .
- Une cartouche de chasse a parcourue une distance de 300 m une durée de  $8 \cdot 10^{-4}$  s .  
que représente la grandeur 375 m / s ?

❖ Approche n° 2 :

- Après 10 minutes de départ d'une course la vitesse d'un athlète était 35 km / h .  
que représente la grandeur 35 km / h pour l'athlète ?
- Après 20 s de lancement de remplir un réservoir le débit était 80 l / min .
- Le moment où la voiture heurte l'arbre la vitesse de la voiture était 120 km / h .  
que représente la grandeur 120 km / h pour la voiture ?
- La vitesse initiale de départ d'une cartouche balle de chasse était 600 m / s  
que représente la grandeur 600 m / s pour la balle de chasse ?
- Le moment où la balle heurte l'oie la vitesse de la balle était 300 m / s .  
que représente la grandeur 300 m / s pour la balle de chasse ?

## II. Dérivabilité d'une fonction $f$ au point $A(x_0, f(x_0))$ ( au point d'abscisse $x_0$ ou bien le point $x_0$ ).

### A. Dérivabilité d'une fonction $f$ au point $x_0$

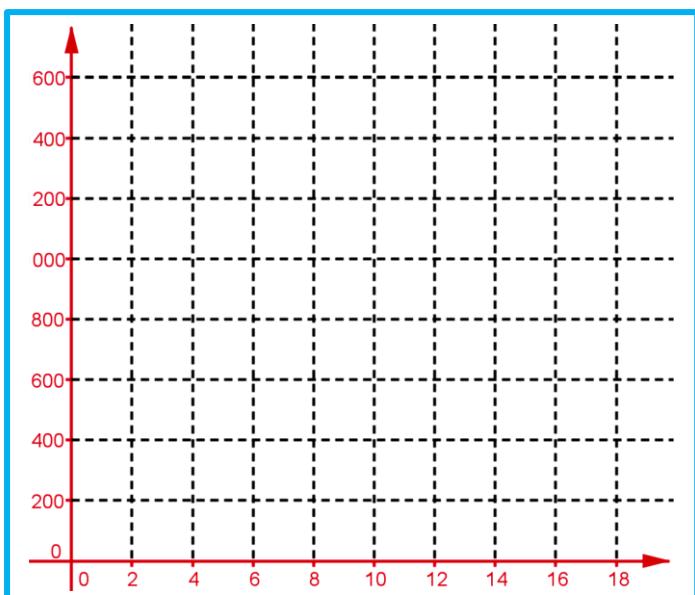
#### I. Activité :

La vitesse d'une voiture de course atteint pendant 10 secondes 360 km / h on suppose que

l'accélération est constante , ceci applique sur le conducteur une poussée horizontale égale son poids tel que son mouvement varie uniformément est déterminé par la fonction horaire  $d_t = f(t) = 5t^2$  tel que  $t$  représente la durée en seconde ,  $d_t = f(t)$  représente la distance en mètre parcourue par la voiture après  $t$  seconde de départ .

Le but est de calculer la vitesse de la voiture après 3 secondes .

1. Quelle est la distance parcourue par la voiture après 10 seconde ?
2. Représenter graphiquement  $d_t$  en fonction de  $t$  .
3. Donner la formule qui donne  $V_m [3,3+h]$   
la vitesse moyenne entre l'instant 3 et  $3+h$  .
4. Calculer la vitesse moyenne pour  $h$  dans le tableau suivant (en m/s) .



0,0001	0,001	0,01	0,1	1	$h$
.....	.....	.....	.....	.....	$V_m (3,3+h)$



5. D'après le tableau quelle est la valeur moyenne qui prend  $V_m$  quand  $h$  devienne très petit ? puis l'exprimer par des symboles .
6. Que représente ce grandeur en physique ?
7. En général on prend  $x_0$  au lieu de 3 donner l'écriture de ce grandeur .
8. On pose :  $x = 3 + h$  écrire la limite précédente en utilisant la variable  $h$ .

### 2. Vocabulaire et notation :

Le nombre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \ell$  ( ou encore  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \ell$  ) est appelé la vitesse instantané de la voiture à l'instant  $t = 3$  ce nombre s'appelle le nombre dérivé au point  $t = 3$  et on note  $\ell = f'(3)$  ou encore  $\ell = \frac{df}{dx}(3)$ .

On écrit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$

### 3. Cas général :

- On prend  $x_0$  au lieu de 3 on obtient :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  avec  $f'(x_0)$  est un nombre réel .
  - On pose :  $x = x_0 + h$  on obtient :  $x \rightarrow x_0$  au lieu de  $h \rightarrow 0$  d'où :
- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$
- Si la limite est finie on dit que la fonction est dérivable en  $x_0$  .
  - Donner la définition d'une fonction dérivable au point  $x_0$  .

### 4. Définition :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contient  $x_0$  ( ou encore  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$  ).

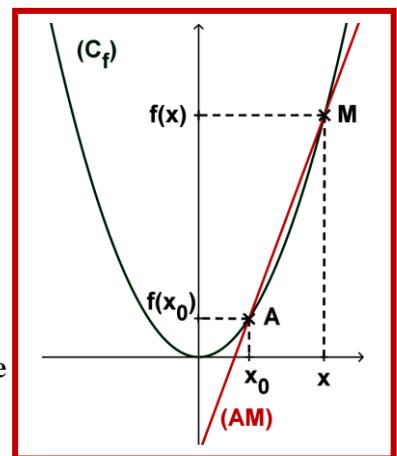
•  $f$  est dérivable au point  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$  on note :  $\ell = f'(x_0)$  s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$ . ( ou encore )

•  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$

### 5. Remarque :

- $V(t_1)$  la vitesse instantanée à instant  $t_1$  est
- $$V(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{(t_1 + h) - t_1} = f'(t_1) \quad (\text{à condition que la limite est finie}).$$
- Ou encore le nombre dérivé en  $t_1$  de la fonction  $d$  ( fonction  $f$  )
  - c.à.d  $V(t_1) = d'(t_1) = f'(t_1)$

Exemple : On suppose que la distance parcourue par un solide en mouvement exprimée en fonction de  $t$  est  $d(t) = f(t) = 10t^2$  tel que  $d$  en km et  $t$  en h ( heure ) .





On calcule la vitesse instantanée du solide en  $t_1 = 1h$ , on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1+h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20$$

**Conclusion :** la vitesse instantanée à l'instant  $t_1 = 1h$  est  $V(t_1) = 20 \text{ km/h}$ .

## B. Interprétation géométrique du nombre dérivé – tangente à une courbe d'une fonction à un point :

### 1. Activité :

- A  $\left( \begin{matrix} x_0 \\ f(x_0) \end{matrix} \right)$  et M  $\left( \begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right)$  deux points de la courbe  $(C_f)$ .
- f est une fonction dérivable au point  $x_0$ .

1. Donner le coefficient directeur et vecteur directeur de  $(AM)$ .
2. Quand x tend vers  $x_0$ , quelle est la position de la droite  $(AM)$ ? déterminer le coefficient directeur de cette position que l'on note  $(T)$ .
3. Donner l'équation réduite de  $(T)$  puis on déduit l'équation cartésienne de  $(T)$ .

### 2. Propriété :

- f est une fonction dérivable au point  $x_0$ .
- $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

❖ Le nombre dérivé  $f'(x_0)$  est le coefficient directeur de la droite tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de f au point A  $\left( x_0, f(x_0) \right)$  (le point  $x_0$ ).

❖ Équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de f au point A  $\left( x_0, f(x_0) \right)$  est  

$$(T) : y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

### 3. Exemple :

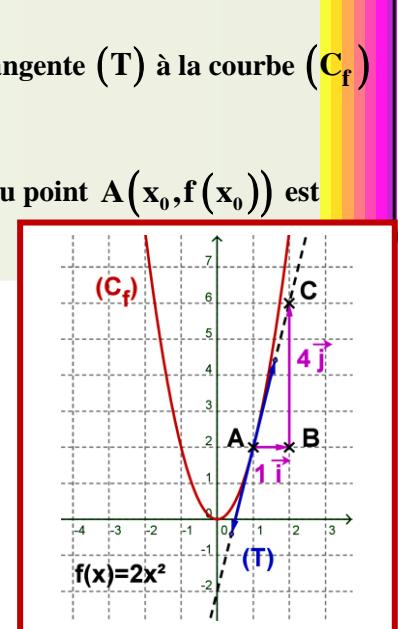
1. Trouver équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de f au point  $x_0 = 1$  avec  $f(x) = 2x^2$ .

L'équation est  $(T) : y = (x - 1)f'(1) + f(1)$  ou  $(T) : y = (x - 1) \times 4 + 2$ .

D'où le coefficient directeur est  $m = 4$  et vecteur directeur est :  $\vec{u}(1, 4) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

A partir du point A  $\left( 1, f(1) \right)$  avec  $f(1) = 2$

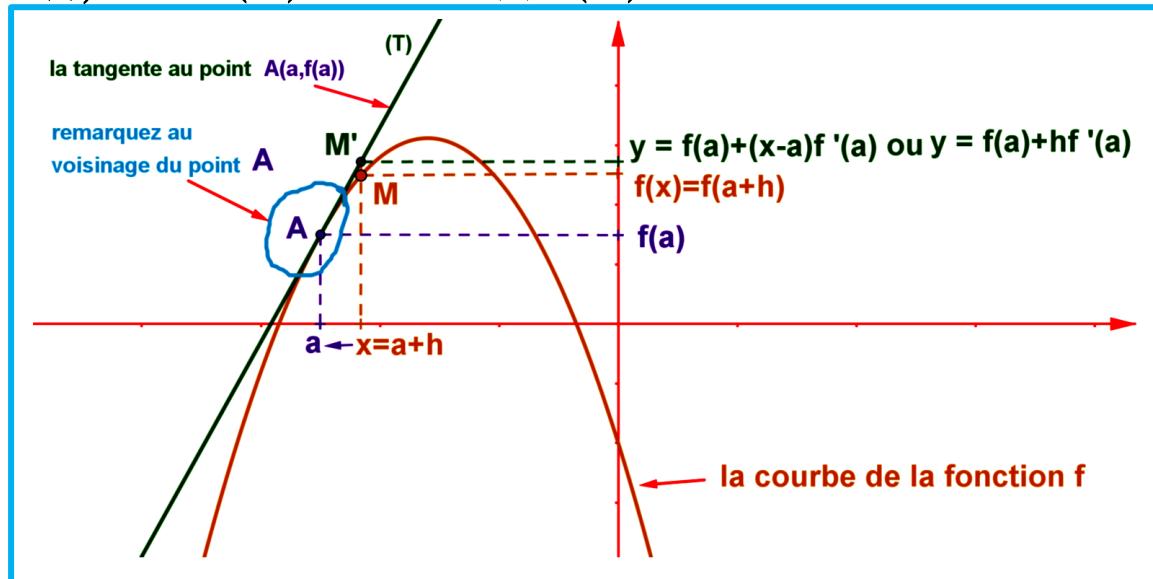
- On construit le point B tel que  $\overrightarrow{AB} = 1\vec{i}$  et on construit le point C tel que  $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$ .



- D'où la droite  $(AC)$  est la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point A.
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est A.

### C. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .

I. Approximation affine d'une fonction  $f$  en un point  $a$  : c'est de trouver une fonction affine  $g(x) = mx + p$  qui sera a peu près égale la fonction  $f(x)$  au voisinage du point  $A(a, f(a))$  ou encore  $f(x) \approx mx + p$ . On sait que au voisinage  $A(a, f(a))$  la courbe  $(C_f)$  et la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  à ce point s'approche beaucoup .



- On considère le point  $M(x, f(x))$  de  $(C_f)$  la courbe de  $f$ , puis le point  $M'(x, y)$  de la tangente  $(T)$  de  $f$  au point  $a$ .

**Remarque :**

- Au point  $A(a, f(a))$  la courbe de  $f$  et la tangente  $(T)$  de  $f$  au point  $a$  s'approche beaucoup
  - Quant  $x$  tend vers  $a$  (c.à.d. on pose  $x = a + h$  avec  $h \rightarrow 0$ ) dans ce cas le point  $M$  tend vers  $M'$ ; donc les ordonnées de  $M$  et  $M'$  s'approche de la même valeur d'où :  $f(a + h) \approx y$  ou encore  $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$
  - Si on pose :  $x = a + h$  on obtient  $f(x) \approx (x - a)f'(a) + f(a)$ .

### 2. Définition :

$f$  est une fonction dérivable au point  $a$ .

- La fonction  $u$  tel que :  $u : x \rightarrow f(a) + (x - a)f'(a)$  (ou encore  $(x - a = h); v : h \rightarrow f(a) + hf'(a)$ ) est appelée la fonction affine tangente à la fonction  $f$  au point  $a$ .
- Quand  $x$  est très proche de  $a$  le nombre  $f(a) + (x - a)f'(a)$  est une approximation affine de  $f(x)$  au voisinage de  $a$  on écrit :  $f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a)$ .
- Ou encore le nombre  $f(a) + hf'(a)$  est approximation affine de  $f(a + h)$  au voisinage de zéro on écrit  $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$  avec  $x - a = h$ .

### 3. Exemple :



❖ Exemple 1 :

1. Trouver une approximation affine du nombre  $f(1+h)$  avec  $f(x) = x^2$  et  $a=1$ .

**Correction :**

$f$  est une fonction dérivable au point 1 avec  $f'(1) = 2$  approximation affine de  $f(1+h)$  est :

$$f(1+h) \approx hf'(1) + f(1) \approx 2h + 1.$$

$$\text{Conclusion : } f(1+h) = (1+h)^2 \approx 2h + 1.$$

**Application du résultat :**

On prend  $h = 0,001$  d'où :  $f(1,001) = f(1+0,001) \approx 2 \times 0,001 + 1$  donc  $f(1+0,001) \approx 1,002$ .

On vérifie :  $f(1,001) = (1,001)^2 = 1,002001$  donc  $1,002 \approx 1,002001$ .

Technique de calcul :  $(1+h)^2$  avec  $h$  très proche de zéro on calcule  $2h + 1$ .

❖ Exemple 2 :

1. Trouver une approximation affine du nombre  $\sqrt{9,002}$ .

**Correction :**

On pose  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a=9$  et  $h=0,002$  d'où  $\sqrt{9,002} = f(9+0,002)$ .

On calcule le nombre dérivé de  $f$  en 9 on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\cancel{\sqrt{x}-3}}{(\cancel{\sqrt{x}-3})(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

D'où :  $f$  est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est  $f'(9) = \frac{1}{6}$ .

On trouve une approximation affine du nombre  $\sqrt{9,002}$ .

On a :  $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$  d'où  $f(9+0,002) \approx f(9) + 0,002 \times f'(9)$ .

Donc :  $f(9+0,002) \approx \sqrt{9} + 0,002 \times \frac{1}{6}$  par suite  $f(9+0,002) \approx 3,000333333$ .

On remarque que  $\sqrt{9,002} \approx 3,000333333$  la calculatrice donne :  $\sqrt{9,002} \approx 3,000333315$  d'où la précision est  $3 \times 10^{-8}$ .

**4. Remarque :**

- Pour la fonction :  $f(x) = x^2$  et  $a=1$  on a :  $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1+2h$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = x^3$  et  $a=1$  on a :  $f(1+h) = (1+h)^3 \approx 1+3h$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a=1$  on a :  $f(1+h) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $a=1$  on a :  $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \approx 1-h$ .

**III. Dérivabilité à droite et à gauche :**

**A. Le nombre dérivée à droite – à gauche :**

**I. Activité :**



$f$  est une fonction définie par :  $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$ .

$$1. \text{ Calculer : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} ; \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}.$$

### 2. Vocabulaire :

- On dit que  $f$  est dérivable à droite du point  $a = 1$  et le nombre dérivé à droite de 1 est  $f'_d(1) = 2$ .
- On dit que  $f$  est dérivable à gauche du point  $a = 1$  et le nombre dérivé à gauche de 1 est  $f'_g(1) = 6$ .
- $f$  n'est pas dérivable au point  $a = 1$ .

### 3. Définition :

$f$  est une fonction définie sur  $I_d = [x_0; x_0 + \alpha]$  (à droite de  $x_0$ ).

$$\bullet f \text{ est dérivable à droite de } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R} . \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right) \ell_d = f'_d(x_0)$$

s'appelle le nombre dérivé à droite de  $f$  en  $x_0$ .

$f$  est une fonction définie sur  $I_g = [x_0 - \alpha; x_0]$  (à gauche de  $x_0$ ).

$$\bullet f \text{ est dérivable à gauche de } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R} . \left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right) \ell_g = f'_g(x_0)$$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $x_0$ .

### 4. Propriété :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contient  $x_0$ .

$f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$  si et seulement si :

$f$  est dérivable à droite de  $x_0$  et  $f$  est dérivable à gauche de  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

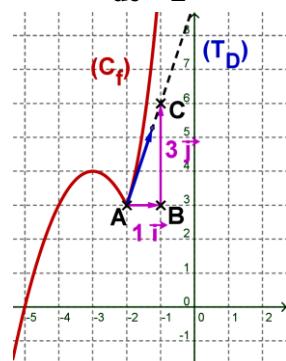
### 5. Interprétation géométrique du nombre dérivé à droite et à gauche équation de deux demi tangentes :

soit  $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases}$  on a  $f'_d(-2) = 3$  et  $f'_g(-2) = -2$

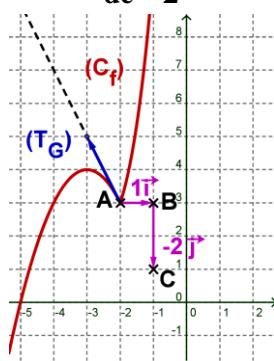
• équation du demi tangente à droite de  $-2$  est  $(T_d) : y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \geq x_0$ .

• équation du demi tangente à gauche de  $-2$  est  $(T_g) : y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \leq x_0$ .

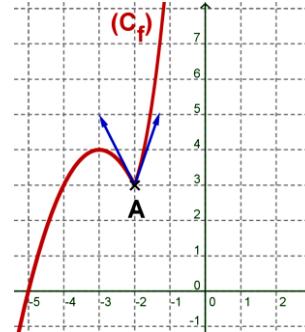
Demi tangente à droite de  $-2$



Demi tangente à gauche de  $-2$



Demi tangente en  $-2$  le point A(-2, 3)  
est un point anguleux

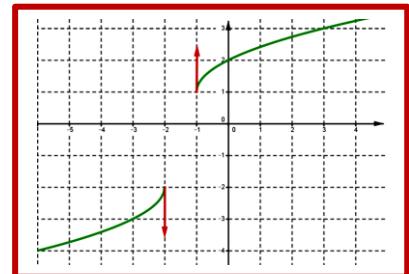


### **6. application :**

$f(x) = |x - 3|$  «étudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x_0 = 3$ .

### **7. demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées :**

exemple  $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$ .



❖ à droite de  $x_0 = 1$  on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \infty$ .

donc  $(C_f)$  admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à droite du point  $M(1, f(1))$

❖ à gauche de  $x_0 = -1$  on a :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$  et  $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} = \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \infty$ . donc  $(C_f)$  admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à gauche du point  $M(-1, f(-1))$ .

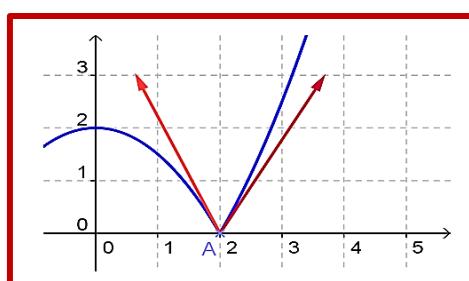
### **8. points anguleux :**

le cas où les demi tangentes de même point

$A(x_0, f(x_0))$  n'ont pas même support (n'ont pas même coefficient directeur), le point  $A(x_0, f(x_0))$  est appelé point anguleux.

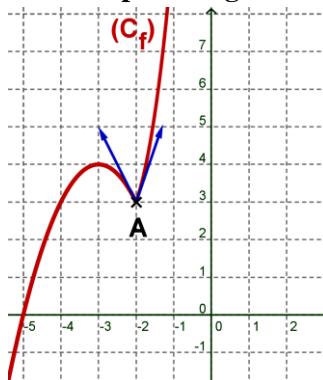
❖ Exemple 1 : le point  $A(-2, 3)$  est un point anguleux.

❖ Exemple 2 : le point  $A(2, 0)$  est un point anguleux.



Demi tangente en  $-2$ . le point  $A(-2, 3)$

est un point anguleux



## **IV. Dérivabilité sur un intervalle :**

### **I. Un intervalle de la forme $]a, b[$ ou de la forme $[a, b[$ .**

**Définition :**

- $f$  est une fonction dérivable sur  $I = ]a; b[$  si et seulement si  $f$  est dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$ .
- $f$  est une fonction dérivable sur  $[a; b[$  si et seulement si  $f$  est dérivable sur  $I = ]a; b[$  et  $f$  est dérivable à droite du point  $a$ .

## **V. La fonction dérivée d'une fonction :**

### **I. Définition :**

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $g$  qui relie chaque élément  $x$  de  $I$  par le nombre  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  et on note :  $g = f'$ .

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$

Ou encore  $x \rightarrow g(x) = f'(x)$   $g$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  on note :  $g = f'$ .



## 2. Activité :

Déterminer  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $D_f = \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = c ; (c \in \mathbb{R})$

## 3. Propriété :

- $f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  sa fonction dérivée sur  $I$  .
- La fonction constante  $f(x) = c ; (c \in \mathbb{R})$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (c)' = 0$ .
- La fonction identique  $f(x) = x$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x)' = 1$ .
- La fonction constante  $f'(x) = (x^2)' = 2x$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ .
- La fonction  $f(x) = x^3$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ .
- La fonction  $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$
- La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  est  $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable sur  $I = ]0, +\infty[$  sa fonction dérivée sur  $I = ]0, +\infty[$  est  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

## VII. La fonction dérivée seconde – dérivée n<sup>ième</sup> d'une fonction $f$ .

### 1. Activité :

1. Donner  $f'$  la fonction dérivée de  $f(x) = x$  sur  $\mathbb{R}$  .
2. Est-ce que  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

### 2. Vocabulaire :

- La dérivée de  $f'$  s'appelle la fonction dérivée deuxième de  $f$  ( dérivée seconde de  $f$  ) . on note  $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$  .
- Si la fonction  $f^{(2)}$  est aussi dérivable sur  $I$  sa fonction dérivée  $(f^{(2)})'(x)$  s'appelle la fonction dérivée troisième de  $f$  ( ou encore la dérivée d'ordre 3 ) et on note  $(f^{(2)})' = f^{(3)}$  .
- En général : la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est la fonction dérivée de  $f^{(n-1)}(x)$  ( la dérivée de la fonction dérivée d'ordre  $n-1$  ) et on note  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$  .

### 3. Application :

1. Calculer  $f^{(3)}(x)$  pour  $f(x) = x^5$  puis pour  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  .

## VIII. Les opérations sur les fonctions dérivables :

### 1. Activité :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $x_0$  .

1. Est-ce que la fonction  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  ?

2. On suppose que la fonction  $f \times g$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et sa fonction dérivée vérifie  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . on déduit que les fonctions suivantes  $\alpha f$  et  $f^2 = f \times f$  et  $f^3 = f \times f \times f$  et ...  $f^n$  sont dérивables sur  $I$  et déterminer leurs fonctions dérivées .
3. On suppose que la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  ( $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ ) ,  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$  . montrer que les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dérивables sur  $I$  , puis déterminer leurs fonctions dérivées .

## 2. Propriété :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérивables sur  $I$  . on a :

- La fonction  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$  .
- La fonction  $\alpha f$  est dérivable sur  $I$  et  $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$
- La fonction  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  .
- La fonction  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur  $I$   $\forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$  .
- La fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur  $I$   $\forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$  .

## 3. Application :

Calculer  $f'$  pour les fonctions suivantes :

1 )  $f(x) = 7$  ; 2 )  $f(x) = x$  ; 3 )  $f(x) = 5x$  ; 4 )  $f(x) = 5x + 7$  ; 5 )  $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$  .

## VIII. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $f^n(x)$ et $f(ax+b)$ .

### A. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles :

#### I. Propriété :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f = \mathbb{R}$  et  $(ax^n)' = nax^{n-1}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f$  .

### B. Dérivabilité de la fonction $f^n(x)$ :

#### I. Propriété :

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  .

- La fonction  $f^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$  .
- Si pour tout  $x$  de  $I$  ;  $f(x) \neq 0$  on a la fonction  $f^p(x)$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$  .

### 2. Exemple : Calculer : $g'(x)$ pour $g(x) = (-2x^4 + 5x^2 + x - 3)^7$ .

Correction :  $g'(x) = [(-2x^4 + x - 3)^7]' = 7(-2x^4 + x - 3)^6(-2x^4 + x - 3)' = 7(-2x^4 + x - 3)^6(-8x^3 + 1)$  .

### C. Dérivabilité de la fonction de la forme $f(ax+b)$ :



### 1. Propriété :

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .  $J$  est l'ensemble des réels  $x$  tel que  $ax+b \in I$ . la fonction  $g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$  est dérivable sur  $J$  avec :

$$\forall x \in J ; g'(x) = [f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

### 2. Application :

On suppose que :  $(\sin(x))' = \cos(x)$  calcule  $g(x) = \sin(5x+3)$ .

### D. Dérivabilité des fonctions de la forme $\sqrt{f(x)}$ .

### 1. Propriété :

$f$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  est dérivable sur un intervalle  $I$  avec  $\forall x \in I : (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ .

### 2. Exemple : $g(x) = \sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}$ on calcule $g'(x)$ .

$$\text{On a : } (g(x))' = (\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1})' = \frac{(x^6 + 5x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}} = \frac{(6x^5 + 10x)}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}}$$

## IX. Dérivabilité des fonctions trigonométriques :

### 1. Activité : On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$

1. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

2. Montrer que la fonction  $g(x) = \tan(x)$  est dérivable en  $x_0$  tel que  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

### 2. Propriété :

- La fonction  $f(x) = \cos(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$ .

- La fonction  $f(x) = \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$

- La fonction  $f(x) = \tan(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  avec  $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$

ou encore  $f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$

### 3. Conséquence :

- $(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$  .  $(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$  .  $(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b))$  .

### 4. Exemple :

$f(x) = 3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3)$  on calcule  $f'(x)$ . On a :

$$(f(x))' = (3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3))'$$

$$= 3 \times 9\cos(9x+3) - 4 \times 3(\cos(8x-1))'\cos^2(8x-1) + 3 \times 6(\tan(7x+3))'\tan^5(7x+3)$$

$$= 27\cos(9x+3) - 12 \times 8\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 18 \times 7(1 + \tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3)$$

Conclusion :  $f'(x) = 27\cos(9x+3) - 96\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 126(1 + \tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3)$



## X. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction $f$	$D_f$ Domaine de définition de $f$	La fonction dérivée $f'$	$D_{f'}$ Domaine de définition de $f'$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$\cdot f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\} : f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} = ]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$\cdot f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\} : f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

## XI. Opérations sur les fonctions dérivées :

Addition	$(f+g)' = f' + g'$	L'inverse	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
multiplication	$(af)' = af'$ $(fg)' = f'g + fg'$	quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Puissance	$(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$ $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$	Racine carrée	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

## XII. Applications de la fonction dérivée première :



**Remarque :**

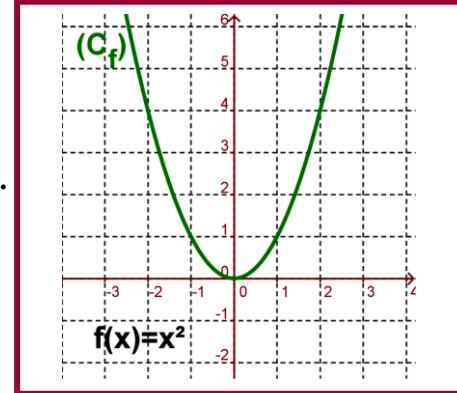
- dans le reste de ce chapitre  $f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$ .
- $(C_f)$  est sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée .**

**I. Activité :**

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction :  $f(x) = x^2$  .

1. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  .
2. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0]$  .



**2. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$  .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$  .
- Si  $f$  est constante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) = 0$  .

**3. Démonstration :**

1<sup>er</sup> cas :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  et  $f$  est croissante sur  $I$  .

Soit  $x_0$  de  $I$  ; on considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ;  $x \in I \setminus \{x_0\}$  .

Puis que  $f$  est croissante sur  $I$  donc :  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$  .

Puis que  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $x_0 \in I$  donc  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc  $g(x)$  admet une limite finie

en  $x_0$  d'où :  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$  ( propriété ordre et les limites ) .

Puis que ceci est vrai pour tout  $x_0$  de  $I$  donc  $\forall x_0 \in I : f'(x_0) \geq 0$  .

Conclusion :  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$

2<sup>ième</sup> cas :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  et  $f$  est décroissante sur  $I$  .

Démonstration analogue

**4. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  .

- Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $I$  (  $f'$  s'annule en un points fini de  $I$  ceci ne change pas la monotonie de  $f$  ) alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$  .
- Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement négative sur  $I$  (  $f'$  s'annule en un points fini de  $I$  ceci ne change pas la monotonie de  $f$  ) alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .
- Si la fonction  $f'$  est nulle sur  $I$  ( sur  $I$  tout entier ) alors  $f$  est constante .



### **5. Exemple :**

Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f(x) = (2x+4)^2$ .

- On calcule :  $f'$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(2x+4)^2]' \\ &= 2(2x+4)'(2x+4) = 2 \times 2(2x+4) = 8x+16 \end{aligned}$$

- Signe de  $f'$  :

$$\begin{aligned} \text{On a } f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow 8x+16 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -2 \end{aligned}$$

x	-∞	-2	+∞
$f'$	-	0	+
f	+∞ ↘		+∞ ↗

$f(-2) = 0$

Donc :  $f'$  est positive sur  $[-2, +\infty[$  et négative sur  $]-\infty, -2]$ .

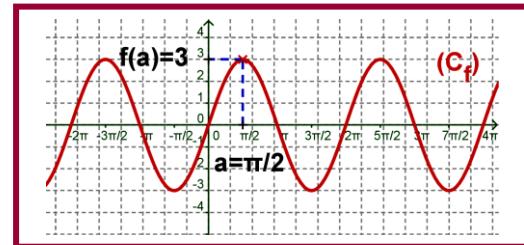
- Tableau de variation de  $f$

### **B. Extremums d'une fonction dérivable :**

#### **1. Activité :**

La figure suivant représente une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un élément de I

1. Est-ce que  $f$  admet un extremum en  $a$  ?
2. Donner la valeur de  $f'(a)$ .



#### **2. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si  $f$  est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors  $f'(a) = 0$ .

#### **3. Remarque :**

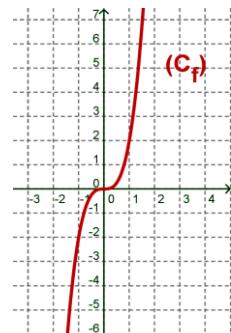
Si  $f'(a) = 0$  ne signifie pas que  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$ .

#### **4. Exemple :**

$f(x) = 2x^3$  on a  $f'(x) = 6x^2$  d'où  $f'(0) = 0$  mais  $f(0)$  n'est pas un extremum de la fonction  $f$ .

La fonction

$$f(x) = 2x^3$$



#### **5. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si  $f'$  s'annule au point a et  $f'$  change de signe au voisinage de a alors  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$

### XIII. Equation différentielle de la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$ .

#### **1. Introduction :**

Pour les équations différentielles :

- $f$  est une fonction ; on la note par  $y$ .
- $f'$  est sa dérivée ; on la note par  $y'$ .
- L'écriture  $f'(x) = af(x) + b$  on la note par  $y' = ay + b$  on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant a et b .
- Toute fonction g dérivable qui vérifie cette équation différentielle ( $g'(x) = ag(x) + b$ ) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle .



- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale).
- Le programme se limite aux équations différentielles de la forme :  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega$  de  $\mathbb{R}$

## **2. Définition :**

Soit  $\omega$  de  $\mathbb{R}$ ,  $y$  est une fonction et  $y''$  sa fonction dérivée deuxième (ou seconde).

L'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$  dont l'inconnue  $y$  s'appelle équation différentielle d'ordre 2 sans seconde membre.

Toute fonction  $f$  dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$  s'appelle solution de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

## **3. Exemple :**

$y'' + 9y = 0$  c'est une équation différentielle.

## **4. Propriété :**

la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  est l'ensemble des fonctions définie par :

$y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .

## **5. Remarque :**

Résoudre l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  signifie de déterminer la solution générale de cet équation.

## **6. Exemple :**

Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 9y = 0$ .

On a  $\omega = 3$  ou  $\omega = -3$  d'où la solution générale de cet équation est l'ensemble des fonctions de la forme :  $y(x) = \alpha \cos 3x + \beta \sin 3x$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$ .

## **7. Cas particulier :**

- $y'' = 0$  donc  $y' = c$  (fonction constante) d'où  $y$  est de la forme  $y(x) = cx + b$  avec  $c$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .

## **8. Exemple :**

Résoudre l'équation différentielle : (E) :  $y'' + 16y = 0$  avec  $f(0) = 1$  et  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ .

La solution générale de l'équation différentielle (E) est de la forme  $y(x) = \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$ .

On a :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= 1 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha \cos(4 \times 0) + \beta \sin(4 \times 0) &= 1 \\ \alpha \cos\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) + \beta \sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) &= 1 \end{aligned} \right. \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \beta &= 1 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

**Conclusion :** La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales

$f(0) = 1$  et  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$  est la fonction  $f(x) = y(x) = \cos 4x + \sin 4x$ .



## XIV. Optimisation :

### 1. Approche :

#### Approche 1 :

**Optimiser** : du latin **optimum** qui signifie le meilleur :

- Qui nous permet de donner les meilleurs choix ou les meilleurs résultat possibles en utilisant un travail convenables d'une situation donnée .
- En mathématique : Optimiser une situation

Demande une analyse pour intégrer cette situation sous forme une fonction puis déterminer les extrema qui donne les meilleurs choix pour répondre à la question posée .

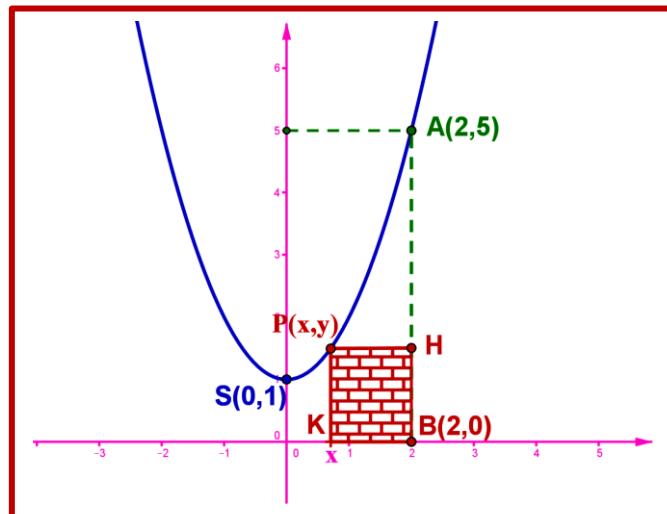
#### Approche 2 :

Plusieurs problèmes de la vie courante nous pousse à déterminer les valeurs maximales ou les valeurs minimales liées à une quantité variables ; tel que ces valeurs présentent les meilleurs de la situation posée ou le problème posé on appelle ces valeurs « **valeurs Optimales** » .

Déterminer ces valeurs présente un exercice ou problème « **optimisation** » .

### 2. Exemple :

La figure ci-contre représente un parabole de sommet  $S(0,1)$  et passe par le point  $A(2,5)$  puis on considère le point  $B(2,0)$  .



- Déterminer  $f(x)$  l'équation du parabole .
- $P(x,y)$  est un point du parabole tel que  $0 \leq x < 2$  .
  - On considère le point  $H$  la projection orthogonale du point  $P$  sur la droite  $(AB)$  .
  - On considère le point  $K$  la projection orthogonale du point  $P$  sur l'axe des abscisse .
  - Déterminer la surface du rectangle  $PHBK$  en fonction de  $x$ .
  - Déterminer l'abscisse du point  $P(x,y)$  du parabole tel que la surface du rectangle  $PHBK$  est maximale .
  - Déterminer la surface maximale du rectangle  $PHBK$  .