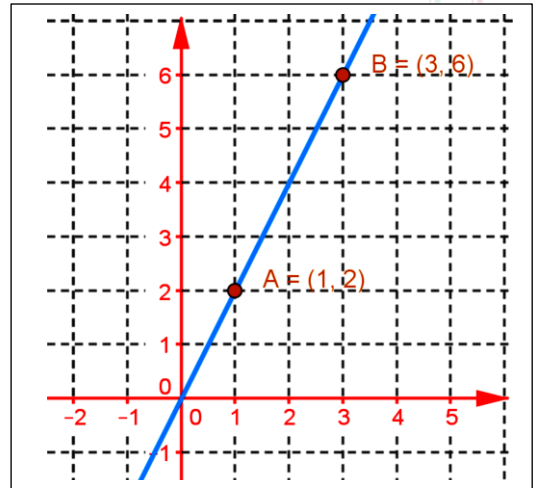


## I. Rappel :

### 1. Coefficient directeur et vecteur directeur d'une droite :

On considère la droite (AB) passant A(1,2) et B(3,6) .



- Le coefficient directeur est :  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{3-1} = 2$  .
- Vecteur directeur est :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  .
- Equation cartésienne de (AB) est de la forme  
(AB) :  $y = m(x - x_A) + y_A$
- (aussi (AB) :  $y = m(x - x_B) + y_B$  . d'où équation cartésienne de (AB) est  
(AB) :  $y = 2(x - 1) + 2 = 2x$  ou encore : (AB) :  $y = 2(x - 3) + 6 = 2x$  .

### 2. Vitesse moyenne :

- Lorsque la vitesse d parcourue par solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t .  
on a la distance d parcourue par ce solide à l'instant t est  $d(t) = f(t)$  .
- La vitesse moyenne c'est la vitesse du solide entre l'instant  $t_1$  et  $t_2$  est

$$V_m[t_1, t_2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

- Exemple :

On suppose que la distance traverser par un solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t est  $d(t) = f(t) = 10t^2$  tel que d est exprimée en km et t en h (heure) .

On calcule la vitesse moyenne du solide entre  $t_1 = 1h$  et  $t_2 = 2h$  on a

$$V_m[t_1, t_2] = V_m[1, 2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{40 - 10}{1} = 30 \text{ km/h} .$$

Remarque :

- Les physiciens exprime les variation par  $\Delta$  .

Exemple :

- les variances entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$  est  $\Delta x = x_2 - x_1$  .
- Les variations entre les ordonnées est  $y_1 = f(x_1)$  et  $y_2 = f(x_2)$  est  $\Delta y = y_2 - y_1$  .

- Les petites variations sont exprimées par  $d$  .

Exemple :

- On considère  $x_2 = x_1 + h$  donc  $\Delta x = h$  et on considère h tends vers 0 donc ce cas on écrit  $dx$  au lieu de  $\Delta x$  .

### 3. Approche :

- Approche n° 1 :

- Un athlète parcourt une distance de 5 km en 10 minutes . que représente la grandeur 30 km/h pour l'athlète ?
- 30 minutes était suffisante pour remplir un réservoir de volume 3 m<sup>3</sup> que représente la grandeur 100 l/min ?

- Une voiture a parcouru une distance de 200 km pendant deux heures .  
que représente la grandeur 100 km / h .
- Une cartouche de chasse a parcourue une distance de 300 m une durée de  $8.10^{-4}$  s .  
que représente la grandeur 375 m / s ?
- ❖ Approche n° 2 :
  - Après 10 minutes de départ d'une course la vitesse d'un athlète était 35 km / h .  
que représente la grandeur 35 km / h pour l'athlète ?
  - Après 20 s de lancement de remplir un réservoir le débit était 80 l / min .
  - Le moment où la voiture heurte l'arbre la vitesse de la voiture était 120 km / h .  
que représente la grandeur 120 km / h pour la voiture ?
  - La vitesse initiale de départ d'une cartouche balle de chasse était 600 m / s  
que représente la grandeur 600 m / s pour la balle de chasse ?
  - Le moment où la balle heurte l'oie la vitesse de la balle était 300 m / s .  
que représente la grandeur 300 m / s pour la balle de chasse ?

## II. Dérivabilité d'une fonction $f$ au point $A(x_0, f(x_0))$ ( au point d'abscisse $x_0$ ou bien le point $x_0$ ) .

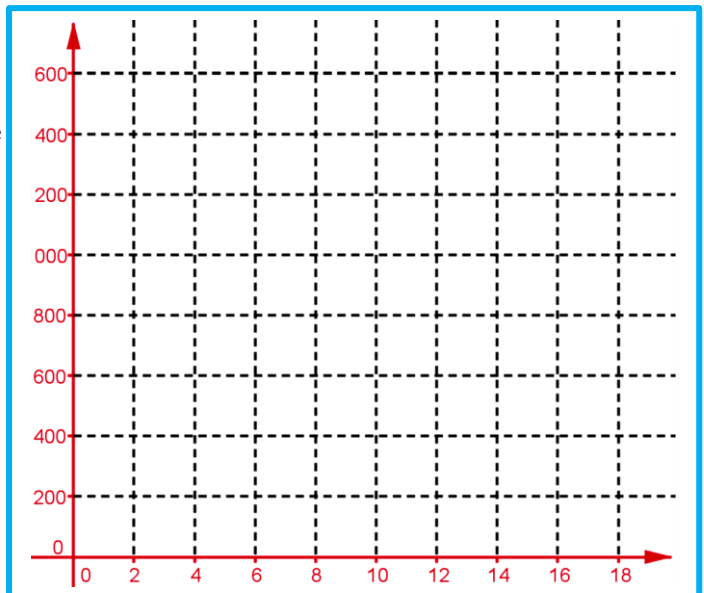
### A. Dérivabilité d'une fonction $f$ au point $x_0$

#### 1. Activité :

La vitesse d'une voiture de course atteint pendant 10 secondes 360 km / h on suppose que l'accélération est constante , ceci applique sur le conducteur une poussée horizontale égale son poids tel que son mouvement varie uniformément est déterminé par la fonction horaire  $d_t = f(t) = 5t^2$  tel que  $t$  représente la durée en seconde ,  $d_t = f(t)$  représente la distance en mètre parcourue par la voiture après  $t$  seconde de départ .

Le but est de calculer la vitesse de la voiture après 3 secondes .

1. Quelle est la distance parcourue par la voiture après 10 seconde ?
2. Représenter graphiquement  $d_t$  en fonction de  $t$  .
3. Donner la formule qui donne  $V_m[3, 3+h]$  la vitesse moyenne entre l'instant 3 et  $3+h$  .
4. Calculer la vitesse moyenne pour  $h$  dans le tableau suivant ( en m/s ) .



0,0001	0,001	0,01	0,1	1	$h$
.....	.....	.....	.....	.....	$V_m(3, 3+h)$

5. D'après le tableau quelle est la valeur moyenne qui prend  $V_m$  quand  $h$  devienne très petit ? puis l'exprimer par des symboles .
6. Que représente ce grandeur en physique ?
7. En général on prend  $x_0$  au lieu de 3 donner l'écriture de ce grandeur .
8. On pose :  $x = 3 + h$  écrire la limite précédente en utilisant la variable  $h$  .

## 2. Vocabulaire et notation :

Le nombre  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \ell$  ( ou encore  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \ell$  est appelé la vitesse instantané de la voiture à l'instant  $t = 3$  ce nombre s'appelle le nombre dérivé au point  $t = 3$  et on note  $\ell = f'(3)$  ou encore  $\ell = \frac{df}{dx}(3)$ .

On écrit  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$  ou encore  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$

## 3. Cas général :

- On prend  $x_0$  au lieu de 3 on obtient :  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$  avec  $f'(x_0)$  est un nombre réel .
  - On pose :  $x = x_0 + h$  on obtient :  $x \rightarrow x_0$  au lieu de  $h \rightarrow 0$  d'où :
- $$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) .$$
- Si la limite est finie on dit que la fonction est dérivable en  $x_0$  .
  - Donner la définition d'une fonction dérivable au point  $x_0$  .

## 4. Définition :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contient  $x_0$  ( ou encore  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  ) .

•  $f$  est dérivable au point  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$  on note :  $\ell = f'(x_0)$  s'appelle le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  . ( ou encore )

•  $f$  est dérivable à droite de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$

## 5. Remarque :

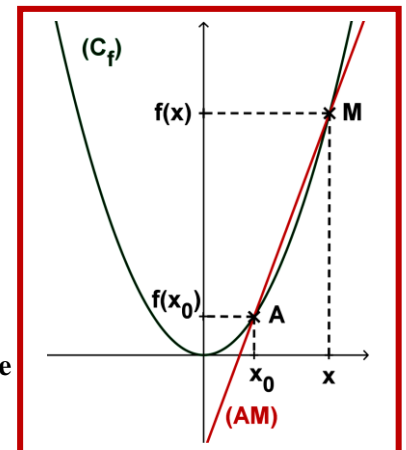
- $V(t_1)$  la vitesse instantanée à instant  $t_1$  est

$$V(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_1+h) - d(t_1)}{(t_1+h) - t_1} = f'(t_1) \text{ (à condition que la limite est finie) .}$$

- Ou encore le nombre dérivé en  $t_1$  de la fonction  $d$  ( fonction  $f$  )

$$\text{c.à.d } V(t_1) = d'(t_1) = f'(t_1)$$

Exemple : On suppose que la distance parcourue par un solide en mouvement exprimée en fonction de  $t$  est  $d(t) = f(t) = 10t^2$  tel que  $d$  en km et  $t$  en h ( heure ) .



On calcule la vitesse instantanée du solide en  $t_1 = 1h$ , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] &= \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20 \\ \lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] &= \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20 \end{aligned}$$

**Conclusion :** la vitesse instantanée à l'instant  $t_1 = 1h$  est  $V(t_1) = 20 \frac{km}{h}$ .

## B. Interprétation géométrique du nombre dérivé – tangente à une courbe d'une fonction a un point :

### 1. Activité :

- $A \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$  et  $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$  deux points de la courbe  $(C_f)$ .
- $f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$ .
  1. Donner le coefficient directeur et vecteur directeur de  $(AM)$ .
  2. Quand  $x$  tend vers  $x_0$ , quelle est la position de la droite  $(AM)$ ? déterminer le coefficient directeur de cette position que l'on note  $(T)$ .
  3. Donner l'équation réduite de  $(T)$  puis on déduit l'équation cartésienne de  $(T)$ .

### 2. Propriété :

- $f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$ .
- $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - ❖ Le nombre dérivé  $f'(x_0)$  est le coefficient directeur de la droite tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point  $A(x_0, f(x_0))$  (le point  $x_0$ ).
  - ❖ Equation cartésienne de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point  $A(x_0, f(x_0))$  est  $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$

### 3. Exemple :

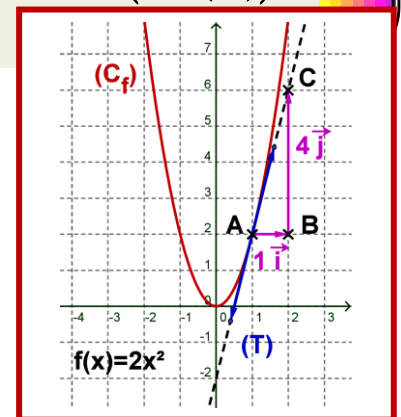
1. Trouver équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  de  $f$  au point  $x_0 = 1$  avec  $f(x) = 2x^2$ .

L'équation est  $(T): y = (x - 1)f'(1) + f(1)$  ou  $(T): y = (x - 1) \times 4 + 2$ .

D'où le coefficient directeur est  $m = 4$  et vecteur directeur est :  $\vec{u}(1, 4) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

A partir du point  $A(1, f(1))$  avec  $f(1) = 2$

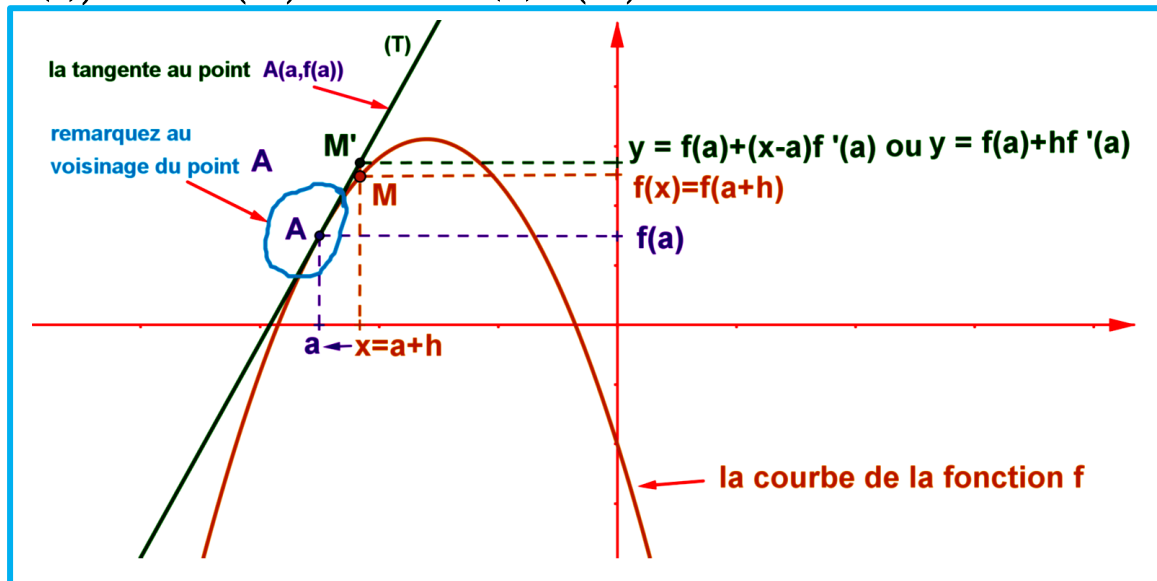
- On construit le point  $B$  tel que  $\vec{AB} = 1\vec{i}$  et on construit le point  $C$  tel que  $\vec{BC} = 4\vec{j}$ .



- D'où la droite  $(AC)$  est la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point  $A$ .
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est  $A$ .

### C. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point.

1. **Approximation affine d'une fonction  $f$  en un point  $a$  :** c'est de trouver une fonction affine  $g(x) = mx + p$  qui sera à peu près-égale la fonction  $f(x)$  au voisinage du point  $A(a, f(a))$  ou encore  $f(x) \approx mx + p$ . On sait que au voisinage  $A(a, f(a))$  la courbe  $(C_f)$  et la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  à ce point s'approche beaucoup.



- On considère le point  $M(x, f(x))$  de  $(C_f)$  la courbe de  $f$ , puis le point  $M'(x, y)$  de la tangente  $(T)$  de  $f$  au point  $a$ .

#### Remarque :

- Au point  $A(a, f(a))$  la courbe de  $f$  et la tangente  $(T)$  de  $f$  au point  $a$  s'approche beaucoup
  - Quant  $x$  tend vers  $a$  ( c.à.d. on pose  $x = a + h$  avec  $h \rightarrow 0$  ) dans ce cas le point  $M$  tend vers  $M'$ ; donc les ordonnées de  $M$  et  $M'$  s'approche de la même valeur d'où :  $f(a+h) \approx y$  ou encore  $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$
  - Si on pose :  $x = a + h$  on obtient  $f(x) \approx (x-a)f'(a) + f(a)$ .

### 2. Définition :

$f$  est une fonction dérivable au point  $a$ .

- La fonction  $u$  tel que :  $u : x \rightarrow f(a) + (x-a)f'(a)$  ( ou encore  $(x-a=h)$ ;  $v : h \rightarrow f(a) + hf'(a)$  ) est appelée la fonction affine tangente à la fonction  $f$  au point  $a$ .
- Quand  $x$  est très proche de  $a$  le nombre  $f(a) + (x-a)f'(a)$  est une approximation affine de  $f(x)$  au voisinage de  $a$  on écrit :  $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$ .
- Ou encore le nombre  $f(a) + hf'(a)$  est approximation affine de  $f(a+h)$  au voisinage de zéro on écrit  $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$  avec  $x-a=h$ .

### 3. Exemple :

## ❖ Exemple 1 :

1. Trouver une approximation affine du nombre  $f(1+h)$  avec  $f(x) = x^2$  et  $a = 1$ .

**Correction :**

$f$  est une fonction dérivable au point 1 avec  $f'(1) = 2$  approximation affine de  $f(1+h)$  est :

$$f(1+h) \approx hf'(1) + f(1) \approx 2h + 1.$$

$$\text{Conclusion : } f(1+h) = (1+h)^2 \approx 2h + 1.$$

**Application du résultat :**

On prend  $h = 0,001$  d'où :  $f(1,001) = f(1+0,001) \approx 2 \times 0,001 + 1$  donc  $f(1+0,001) \approx 1,002$ .

On vérifie :  $f(1,001) = (1,001)^2 = 1,002001$  donc  $1,002 \approx 1,002001$ .

Technique de calcul :  $(1+h)^2$  avec  $h$  très proche de zéro on calcule  $2h + 1$ .

## ❖ Exemple 2 :

1. Trouver une approximation affine du nombre  $\sqrt{9,002}$ .

**Correction :**

On pose  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a = 9$  et  $h = 0,002$  d'où  $\sqrt{9,002} = f(9+0,002)$ .

On calcule le nombre dérivé de  $f$  en 9 on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\cancel{\sqrt{x}} - 3}{(\cancel{\sqrt{x}} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

D'où :  $f$  est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est  $f'(9) = \frac{1}{6}$ .

On trouve une approximation affine du nombre  $\sqrt{9,002}$ .

On a :  $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$  d'où  $f(9+0,002) \approx f(9) + 0,002 \times f'(9)$ .

Donc :  $f(9+0,002) \approx \sqrt{9} + 0,002 \times \frac{1}{6}$  par suite  $f(9+0,002) \approx 3,000333333$ .

On remarque que  $\sqrt{9,002} \approx 3,000333333$  la calculatrice donne :  $\sqrt{9,002} \approx 3,000333315$  d'où la précision est  $3 \times 10^{-8}$ .

**4. Remarque :**

- Pour la fonction :  $f(x) = x^2$  et  $a = 1$  on a :  $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1 + 2h$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = x^3$  et  $a = 1$  on a :  $f(1+h) = (1+h)^3 \approx 1 + 3h$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $a = 1$  on a :  $f(1+h) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$ .
- Pour la fonction :  $f(x) = \frac{1}{x}$  et  $a = 1$  on a :  $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \approx 1 - h$ .

**III. Dérivabilité à droite et à gauche :****A. Le nombre dérivée à droite – à gauche :****1. Activité :**



$f$  est une fonction définie par :  $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$ .

1. Calculer :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  ;  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ .

## 2. Vocabulaire :

- On dit que  $f$  est dérivable à droite du point  $a = 1$  et le nombre dérivé à droite de 1 est  $f'_d(1) = 2$ .
- On dit que  $f$  est dérivable à gauche du point  $a = 1$  et le nombre dérivé à gauche de 1 est  $f'_g(1) = 6$ .
- $f$  n'est pas dérivable au point  $a = 1$ .

## 3. Définition :

$f$  est une fonction définie sur  $I_d = [x_0; x_0 + \alpha[$  (à droite de  $x_0$ ).

$f$  est dérivable à droite de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right) \ell_d = f'_d(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à droite de  $f$  en  $x_0$ .

$f$  est une fonction définie sur  $I_g = ]x_0 - \alpha; x_0]$  (à gauche de  $x_0$ ).

$f$  est dérivable à gauche de  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$  .  $\left( \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right) \ell_g = f'_g(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de  $f$  en  $x_0$ .

## 4. Propriété :

$f$  est une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  contient  $x_0$ .

$f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$  si et seulement si :

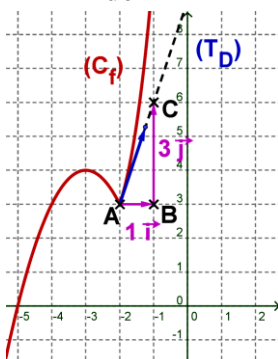
$f$  est dérivable à droite de  $x_0$  et  $f$  est dérivable à gauche de  $x_0$  et  $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ .

## 5. interprétation géométrique du nombre dérivé à droite et à gauche équation de deux demis tangentes :

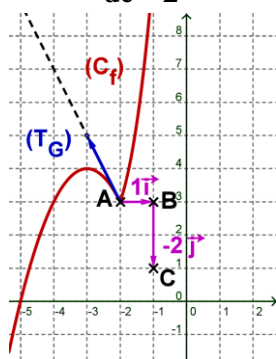
soit  $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases}$  on a  $f'_d(-2) = 3$  et  $f'_g(-2) = -2$

- équation du demi tangente à droite de  $-2$  est  $(T_d) : y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \geq x_0$ .
- équation du demi tangente à gauche de  $-2$  est  $(T_g) : y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$  avec  $x \leq x_0$ .

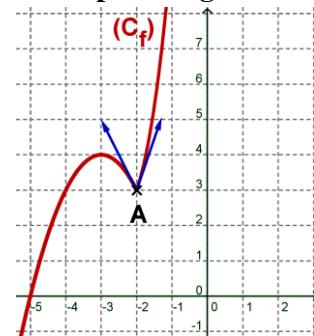
Demi tangente à droite de  $-2$



Demi tangente à gauche de  $-2$



Demi tangente en  $-2$  le point A  $(-2, 3)$  est un point anguleux



### 6. application :

$f(x) = |x-3|$  «étudier la dérivabilité de  $f$  au point  $x_0 = 3$  .

### 7. demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées :

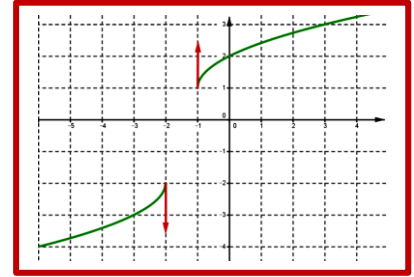
exemple  $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$  .

❖ à droite de  $x_0 = 1$  on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \infty$  .

donc  $(C_f)$  admet demi tangente verticale ( parallèle à l'axe des ordonnées ) à droite du point  $M(1, f(1))$

❖ à gauche de  $x_0 = -1$  on a :  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$  et  $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \infty$  . donc  $(C_f)$  admet demi

tangente verticale ( parallèle à l'axe des ordonnées ) à gauche du point  $M(-1, f(-1))$  .



### 8. points anguleux :

le cas où les demis tangentes de même point

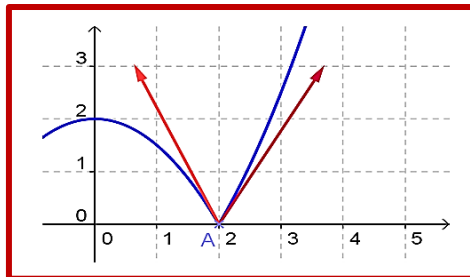
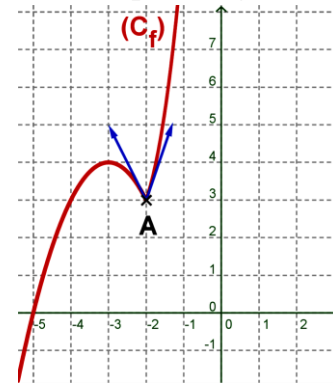
$A(x_0, f(x_0))$  n'ont pas même support ( n'ont pas même coefficient directeur ), le point  $A(x_0, f(x_0))$  est appelé point anguleux .

❖ Exemple 1 : le point  $A(-2, 3)$  est un point anguleux .

❖ Exemple 2 : le point  $A(2, 0)$  est un point anguleux .

Demi tangente en  $-2$  . le point  $A(-2, 3)$

est un point anguleux



## IV. Dérivabilité sur un intervalle :

### 1. Un intervalle de la forme $]a, b[$ ou de la forme $[a, b[$ .

Définition :

- $f$  est une fonction dérivable sur  $I = ]a; b[$  si et seulement si  $f$  est d dérivable en tout point  $x_0$  de  $I$  .
- $f$  est une fonction dérivable sur  $[a; b[$  si et seulement si  $f$  est d dérivable sur  $I = ]a; b[$  et  $f$  est dérivable à droite du point  $a$  .

## V. La fonction dérivée d'une fonction :

### 1. Définition :

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  .

La fonction  $g$  qui relie chaque élément  $x$  de  $I$  par le nombre  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  et on note :  $g = f'$  .

Ou encore  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow g(x) = f'(x)$   $g$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  on note :  $g = f'$  .



## 2. Activité :

Déterminer  $f'$  la fonction dérivée de  $f$  sur  $D_f = \mathbb{R}$  tel que  $f(x) = c$  ; ( $c \in \mathbb{R}$ )

## 3. Propriété :

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $f'$  sa fonction dérivée sur  $I$ .

- La fonction constante  $f(x) = c$  ; ( $c \in \mathbb{R}$ ) est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (c)' = 0$ .
- La fonction identique  $f(x) = x$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x)' = 1$ .
- La fonction constante  $f(x) = (x^2)' = 2x$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^2)' = 2x$ .
- La fonction  $f(x) = x^3$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ .
- La fonction  $f(x) = x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est dérivable sur  $I = \mathbb{R}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R}$  est  $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$ .
- La fonction  $f(x) = \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sa fonction dérivée sur  $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  est  $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .
- La fonction  $f(x) = \sqrt{x}$  est dérivable sur  $I = ]0, +\infty[$  sa fonction dérivée sur  $I = ]0, +\infty[$  est  $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

## VI. La fonction dérivée seconde – dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction $f$ .

### 1. Activité :

1. Donner  $f'$  la fonction dérivée de  $f(x) = x$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. Est-ce que  $f'$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

### 2. Vocabulaire :

- La dérivée de  $f'$  s'appelle la fonction dérivée deuxième de  $f$  (dérivée seconde de  $f$ ). on note  $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$ .
- Si la fonction  $f^{(2)}$  est aussi dérivable sur  $I$  sa fonction dérivée  $(f^{(2)})'(x)$  s'appelle la fonction dérivée troisième de  $f$  (ou encore la dérivée d'ordre 3) et on note  $(f^{(2)})' = f^{(3)}$ .
- En général : la dérivée d'ordre  $n$  de  $f$  est la fonction dérivée de  $f^{(n-1)}(x)$  (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre  $n-1$ ) et on note  $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$ .

### 3. Application :

1. Calculer  $f^{(3)}(x)$  pour  $f(x) = x^5$  puis pour  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

## VII. Les opérations sur les fonctions dérivables :

### 1. Activité :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables en  $x_0$ .

1. Est-ce que la fonction  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  ?

2. On suppose que la fonction  $f \times g$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et sa fonction dérivée vérifie  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ . on déduit que les fonctions suivantes  $\alpha f$  et  $f^2 = f \times f$  et  $f^3 = f \times f \times f$  et ...  $f^n$  sont dérivables sur  $I$  et déterminer leurs fonctions dérivées.
3. On suppose que la fonction  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  ( $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ ),  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $I$ .  
montrer que les fonctions  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont dérivables sur  $I$ , puis déterminer leurs fonctions dérivées.

**2. Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables sur  $I$ . on a :

- La fonction  $f + g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ .
- La fonction  $\alpha f$  est dérivable sur  $I$  et  $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$
- La fonction  $f \times g$  est dérivable sur  $I$  et  $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .
- La fonction  $\frac{1}{g}$  est dérivable sur  $I$   $\forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ .
- La fonction  $\frac{f}{g}$  est dérivable sur  $I$   $\forall x \in I, g(x) \neq 0$  et  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ .

**3. Application :**

Calculer  $f'$  pour les fonctions suivantes :

- 1)  $f(x) = 7$  ; 2)  $f(x) = x$  ; 3)  $f(x) = 5x$  ; 4)  $f(x) = 5x + 7$  ; 5)  $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$ .

**VIII. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles -  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  et  $f^n(x)$  et  $f(ax+b)$ .****A. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles :****1. Propriété :**

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f = \mathbb{R}$  et  $(ax^n)' = nax^{n-1}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition  $D_f$ .

**B. Dérivabilité de la fonction  $f^n(x)$  :****1. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- La fonction  $f^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  est dérivable sur  $I$  et on a :  $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$ .
- Si pour tout  $x$  de  $I$  ;  $f(x) \neq 0$  on a la fonction  $f^p(x)$  avec  $p \in \mathbb{Z}^*$  est dérivable sur  $I$  et  $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$ .

**2. Exemple :** Calculer :  $g'(x)$  pour  $g(x) = (-2x^4 + 5x^2 + x - 3)^7$ .

**Correction :**  $g'(x) = [(-2x^4 + x - 3)^7]' = 7(-2x^4 + x - 3)^6(-2x^4 + x - 3)' = 7(-2x^4 + x - 3)^6(-8x^3 + 1)$ .

**C. Dérivabilité de la fonction de la forme  $f(ax+b)$  :**

**1. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ ,  $a$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$ .  $J$  est l'ensemble des réels  $x$  tel que  $ax+b \in I$ . la fonction  $g: x \mapsto g(x) = f(ax+b)$  est dérivable sur  $J$  avec :

$$\forall x \in J ; g'(x) = [f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

**2. Application :**

On suppose que :  $(\sin(x))' = \cos(x)$  calcule  $g(x) = \sin(5x+3)$ .

**D. Dérivabilité des fonctions de la forme  $\sqrt{f(x)}$ .****1. Propriété :**

$f$  est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  est dérivable sur un intervalle  $I$  avec  $\forall x \in I : (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ .

**2. Exemple :**  $g(x) = \sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}$  on calcule  $g'(x)$ .

$$\text{On a : } (g(x))' = (\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1})' = \frac{(x^6 + 5x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}} = \frac{(6x^5 + 10x)}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}}$$

**IX. Dérivabilité des fonctions trigonométriques :****1. Activité :** On considère la fonction  $f(x) = \cos(x)$  et  $g(x) = \sin(x)$ 

1. Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

2. Montrer que la fonction  $g(x) = \tan(x)$  est dérivable en  $x_0$  tel que  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ;  $k \in \mathbb{Z}$ .

**2. Propriété :**

• La fonction  $f(x) = \cos(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$ .

• La fonction  $f(x) = \sin(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  avec  $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$

• La fonction  $f(x) = \tan(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$  avec  $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$

ou encore  $f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$

**3. Conséquence :**

•  $(\cos(ax+b))' = -\sin(ax+b)$  .  $(\sin(ax+b))' = \cos(ax+b)$  .  $(\tan(ax+b))' = 1 + \tan^2(ax+b)$  .

**4. Exemple :**

$f(x) = 3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3)$  on calcule  $f'(x)$ . On a :

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3))' \\ &= 3 \times 9\cos(9x+3) - 4 \times 3(\cos(8x-1))' \cos^2(8x-1) + 3 \times 6(\tan(7x+3))' \tan^5(7x+3) \\ &= 27\cos(9x+3) - 12 \times 8\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 18 \times 7(1 + \tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3) \end{aligned}$$

**Conclusion :**  $f'(x) = 27\cos(9x+3) - 96\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 126(1 + \tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3)$

**X. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :**

La fonction f	$D_f$ Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} = ]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2 \times \sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

**XI. Operations sur les fonctions dérivées :**

Addition	$(f + g)' = f' + g'$	L'inverse	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
multiplication	$(\alpha f)' = \alpha f'$ $(fg)' = f'g + fg'$	quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Puissance	$(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$ $(f(ax + b))' = af'(ax + b)$	Racine carrée	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$

**XII. Applications de la fonction dérivée première :**

**Remarque :**

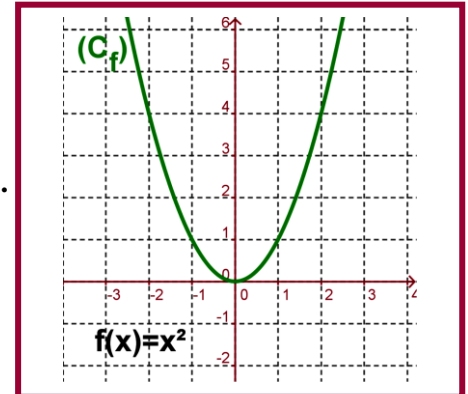
- dans le reste de ce chapitre  $f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$ .
- $(C_f)$  est sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée.**

**1. Activité :**

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction :  $f(x) = x^2$ .

1. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
2. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée  $f'$  sur l'intervalle  $]-\infty, 0]$ .



**2. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$ .

- Si  $f$  est croissante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$ .
- Si  $f$  est décroissante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$ .
- Si  $f$  est constante sur  $I$  alors  $\forall x \in I : f'(x) = 0$ .

**3. Démonstration :**

1<sup>er</sup> cas :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  et  $f$  est croissante sur  $I$ .

Soit  $x_0$  de  $I$  ; on considère la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  ;  $x \in I \setminus \{x_0\}$ .

Puis que  $f$  est croissante sur  $I$  donc :  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ .

Puis que  $f$  est dérivable sur  $I$  et  $x_0 \in I$  donc  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc  $g(x)$  admet une limite finie

en  $x_0$  d'où :  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$  (propriété ordre et les limites).

Puis que ceci est vrai pour tout  $x_0$  de  $I$  donc  $\forall x_0 \in I : f'(x_0) \geq 0$ .

Conclusion :  $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$

2<sup>ème</sup> cas :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$  et  $f$  est décroissante sur  $I$ .

Démonstration analogue

**4. Propriété :**

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle  $I$ .

- Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement positive sur  $I$  ( $f'$  s'annule en un points fini de  $I$  ceci ne change pas la monotonie de  $f$ ) alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si la fonction dérivée  $f'$  est strictement négative sur  $I$  ( $f'$  s'annule en un points fini de  $I$  ceci ne change pas la monotonie de  $f$ ) alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si la fonction  $f'$  est nulle sur  $I$  (sur  $I$  tout entier) alors  $f$  est constante.

### 5. Exemple :

Etudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  avec  $f(x) = (2x+4)^2$ .

- On calcule :  $f'$ .

$$f'(x) = [(2x+4)^2]'$$

$$= 2(2x+4)'(2x+4) = 2 \times 2(2x+4) = 8x+16$$

- Signe de  $f'$  :

$$\text{On a } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8x+16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Donc :  $f'$  est positive sur  $[-2, +\infty[$  et négative sur  $]-\infty, -2]$ .

- Tableau de variation de  $f$

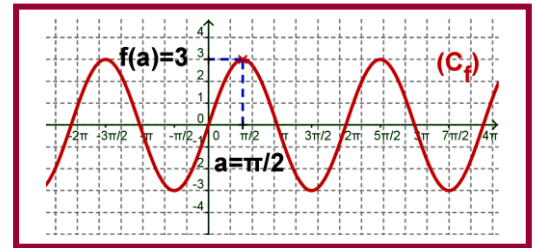
x	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f'$	-	0	+
f	$+\infty$ $\searrow$	$f(-2) = 0$	$\nearrow$ $+\infty$

### B. Extremums d'une fonction dérivable :

#### 1. Activité :

La figure suivant représente une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a$  est un élément de  $I$

- Est-ce que  $f$  admet un extremum en  $a$  ?
- Donner la valeur de  $f'(a)$ .



#### 2. Propriété :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a$  est un élément de  $I$ .

Si  $f$  est dérivable au point  $a$  et admet un extremum au point  $a$  alors  $f'(a) = 0$ .

#### 3. Remarque :

Si  $f'(a) = 0$  ne signifie pas que  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$ .

#### 4. Exemple :

$f(x) = 2x^3$  on a  $f'(x) = 6x^2$  d'où  $f'(0) = 0$  mais  $f(0)$  n'est pas un extremum de la fonction  $f$ .

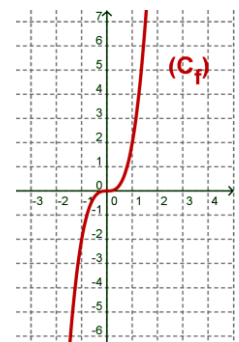
#### 5. Propriété :

$f$  est une fonction dérivée sur un intervalle ouvert  $I$ ,  $a$  est un élément de  $I$ .

Si  $f'$  s'annule au point  $a$  et  $f'$  change de signe au voisinage de  $a$  alors  $f(a)$  est un extremum de la fonction  $f$

La fonction

$$f(x) = 2x^3$$



### XIII. Equation différentielle de la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$ .

#### 1. Introduction :

Pour les équations différentielles :

- $f$  est une fonction ; on la note par  $y$ .
- $f'$  est sa dérivée ; on la note par  $y'$ .
- L'écriture  $f'(x) = af(x) + b$  on la note par  $y' = ay + b$  on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constant  $a$  et  $b$ .
- Toute fonction  $g$  dérivable qui vérifie cette équation différentielle ( $g'(x) = ag(x) + b$ ) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle.



- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale) .
- Le programme se limite aux équations différentielles de la forme :  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega$  de  $\mathbb{R}$

## 2. Définition :

Soit  $\omega$  de  $\mathbb{R}$ ,  $y$  est une fonction et  $y''$  sa fonction dérivée deuxième (ou seconde) .

L'équation  $y'' + \omega^2 y = 0$  dont l'inconnue  $y$  s'appelle équation différentielle d'ordre 2 sans seconde membre .

Toute fonction  $f$  dérivable deux fois sur  $\mathbb{R}$  et vérifie :  $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$  s'appelle solution de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  .

## 3. Exemple :

$y'' + 9y = 0$  c'est une équation différentielle .

## 4. Propriété :

la solution générale de l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  est l'ensemble des fonctions définie par :

$y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

## 5. Remarque :

Résoudre l'équation différentielle  $y'' + \omega^2 y = 0$  signifie de déterminer la solution générale de cet équation .

## 6. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle  $y'' + 9y = 0$  .

On a  $\omega = 3$  ou  $\omega = -3$  d'où la solution générale de cet équation est l'ensemble des fonctions de la forme :  $y(x) = \alpha \cos 3x + \beta \sin 3x$  avec  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{R}$  .

## 7. Cas particulier :

- $y'' = 0$  donc  $y' = c$  (fonction constante) d'où  $y$  est de la forme  $y(x) = cx + b$  avec  $c$  et  $b$  de  $\mathbb{R}$  .

## 8. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle : (E) :  $y'' + 16y = 0$  avec  $f(0) = 1$  et  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$  .

La solution générale de l'équation différentielle (E) est de la forme  $y(x) = \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$  .

On a :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cos(4 \times 0) + \beta \sin(4 \times 0) = 1 \\ \alpha \cos\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) + \beta \sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

**Conclusion :** La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales

$f(0) = 1$  et  $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$  est la fonction  $f(x) = y(x) = \cos 4x + \sin 4x$  .

#### XIV. Optimisation :

##### 1. Approche :

##### Approche 1 :

**Optimiser** : du latin **optimum** qui signifie le meilleur :

- Qui nous permet de donner les meilleurs choix ou les meilleurs résultat possibles en utilisant un travail convenables d'une situation donnée .
- En mathématique : Optimiser une situation

Demande une analyse pour intégrer cette situation sous forme une fonction puis déterminer les extremums qui donne les meilleurs choix pour répondre à la question posée .

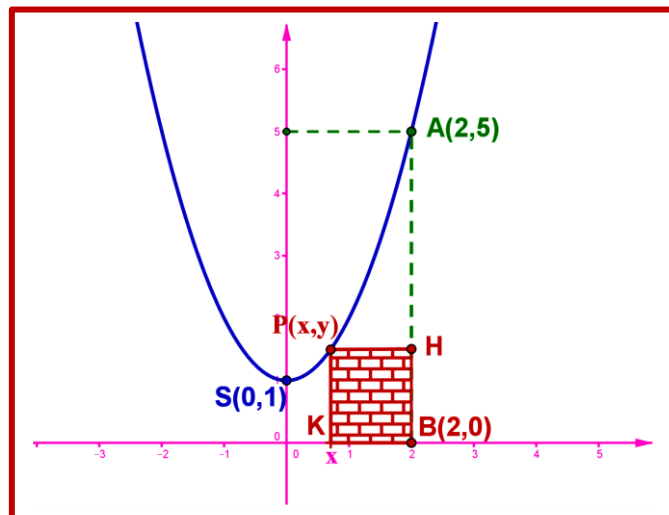
##### Approche 2 :

Plusieurs problèmes de la vie courante nous pousse à déterminer les valeurs maximales ou les valeurs minimales liées a une quantité variables ; tel que ces valeurs présentent les meilleurs de la situation posée ou le problème posé on appelle ces valeurs « **valeurs Optimales** » .

Déterminer ces valeurs présente un exercice ou problème « **optimisation** » .

##### 2. Exemple :

La figure ci-contre représente un parabole de sommet  $S(0,1)$  et passe par le point  $A(2,5)$  puis on considère le point  $B(2,0)$  .



1. Déterminer  $f(x)$  l'équation du parabole .
2.  $P(x,y)$  est un point du parabole tel que  $0 \leq x < 2$  .
  - On considère le point H la projection orthogonale du point P sur la droite (AB) .
  - On considère le point K la projection orthogonale du point P sur l'axe des abscisse .
    - a. Déterminer la surface du rectangle PHBK en fonction de x .
    - b. Déterminer l'abscisse du point  $P(x,y)$  du parabole tel que la surface du rectangle PHBK est maximale .
    - c. Déterminer la surface maximale du rectangle PHBK .