LA DERIVATION

I) DERIVATION EN UN POINT

1) Activités

Activité :

Déterminer la limite quad x tend vers a de $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ dans les cas suivants :

1- $f(x) = 3x^2 - x + 2$ et $a = -2$

2- $f(x) = \frac{2x^2+1}{x-1}$ et $a = 2$

3- $f(x) = sin3x$ et $a = \frac{\pi}{6}$

4- $f(x) = |2x^2 + x - 3|$ et $a = 1$.

2) Définition :

Définition :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle **ouvert de centre a**.
On dit que f est dérivable en a si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. Dans ce cas on appellera cette limite le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

1- Montrer que f est dérivable en -2.

2- f est–elle dérivable en 0.

Remarque :

Si f est dérivable en a et $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ On pose : $h = x - a$ si x end vers a alors h tend vers 0 et on obtient $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Application :

Calculer le nombre dérivé de $f(x) = x^3 + x$ en $a = 1$ en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

2) Dérivé à droite dérivé à gauche.

Activité : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x, & x < 0 \\ -2x^2 + 3x, & x \geq 0 \end{cases}$

Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ et que $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 3$.

On peut conclure donc que f n'est pas dérivable en 0.

Posons : $g(x) = 3x^2 + x$ on a $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1$ et puisque $g = f$ sur $]-\infty, 0[$, on peut dire que f **est dérivable à droite de 0 et** le nombre 1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0 et se note $f'_d(0)$.

$h(x) = 3x^2 + x$ on a $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 3$ et puisque $h = f$ sur $]0, +\infty[$, on peut dire que f **est dérivable à gauche de 0 et** le nombre 3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0 et se note $f'_g(0)$.

Définition :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

On dit que f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à droite de a et on le note : $f'_d(a)$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a - r, a]$où $r > 0$

On dit que f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie, dans ce cas on appelle cette limite ; le nombre dérivé de la fonction f à gauche de a et on le note : $f'_g(a)$.

Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 2x - 3| + 2x$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.

2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.

3- f est elle dérivable en -1.

Théorème :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.
> f est dérivable en a si et seleument si elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Preuve : En exercice.

II) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) Rappelles

Exercice 1 :

Soit la droite (D): $2x + 3y - 1 = 0$

1- Déterminer le coefficient directeur de la droite (D).

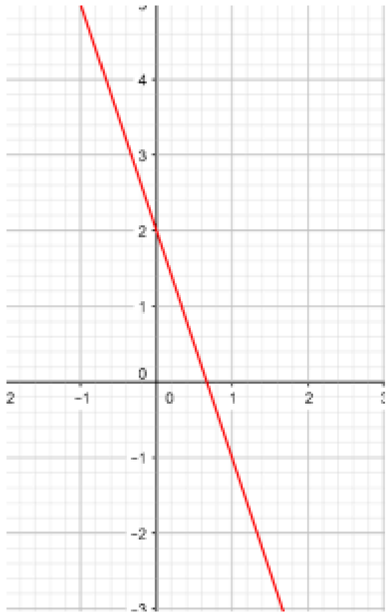
2- Ecrire l'équation réduite de la droite (D)

Exercice 2 :

Déterminer l'équation réduite de la droite qui passe par $A(-1,3)$ et de le coefficient directeur -2

Exercice 3 :

Déterminer l'équation réduite de la droite (Δ) tracée ci-contre.



2) La fonction affine tangente à une fonction.

Soit f une fonction dérivable en a et $f'(a)$ son nombre dérivé en a.

Posons : $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

On a : $(x-a)\varphi(x) = -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a)$ et par suite :

$f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

Posons : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ on aura : $f(x) = u(x) + (x-a)\varphi(x)$

La fonction u est une **fonction affine** et s'appelle la fonction affine tangente en a.

Propriété :

> Soit f une fonction dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :
> $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

Application :

Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

Propriété :

> Toute fonction dérivable en a est continue en a.

Preuve :

Puisque f est dérivable en a alors : $f(x) = f'(a)(x-a) + f(a) + (x-a)\varphi(x)$

en passant à la limite : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a

La réciproque de la propriété précédente n'est pas vraie : $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0.

Remarques :

- La fonction affine tangente en a d'une fonction dérivable en a est une approximation de f au voisinage de a
  On peut écrire alors : $f(x) \sim f'(a)(x-a) + f(a)$
- Si on pose $x = a + h$; on aura : $f(a+h) \sim f'(a)h + f(a)$ qui dit que si on ne connait pas $f(a+h)$ et si h est petit, on peut" essayer de mettre " $f'(a)h + f(a)$ a la place de $f(a+h)$.

Exemple :

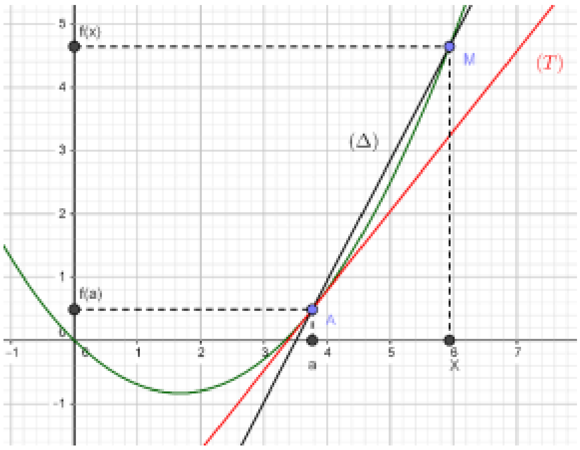
Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre :

- $f(x) = sinx$
- $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est conu)
- $h = 3 - \pi$ (pour avoir :$3 = \pi + h$)

On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$.

3) Interprétations géométriques.

3.1 Tangente en un point.



Soit f un fonction dérivable en , $A(a, f(a))$
Soit x un élément de D_f différent de a et $M(x, f(x))$
$(\Delta) = (AM)$; le coefficient directeur de (Δ) est le réel $m = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
En faisant tendre x vers a et à la position limite une droite (T) qui passe par $A(a, f(a))$ et qui a pour coefficient directeur :$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ qui n'est que $f'(a)$ (car f est dérivable en a)
Donc : $(T): y = f'(a)x + p$ et puisque (T) passe par $A(a, f(a))$
alors : $f(a) = f'(a)a + p$ donc $p = f(a) - f'(a)a$
et on peut conclure que : $(T): y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$
Finalement ; $(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$
La droite (T) s'appelle **la tangente à la courbe C_f en $A(a, f(a)$**

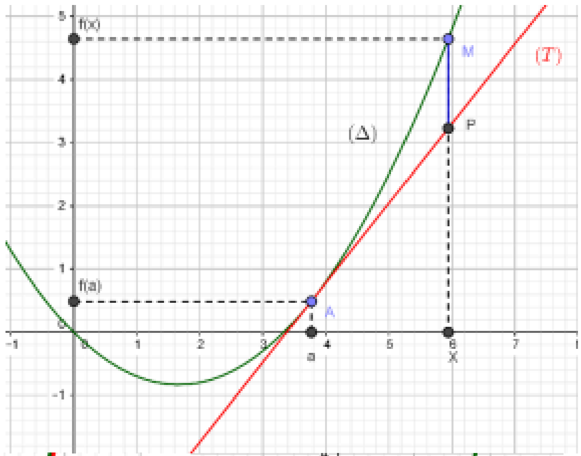
Théorème :

Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :
$\boldsymbol{(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)}$

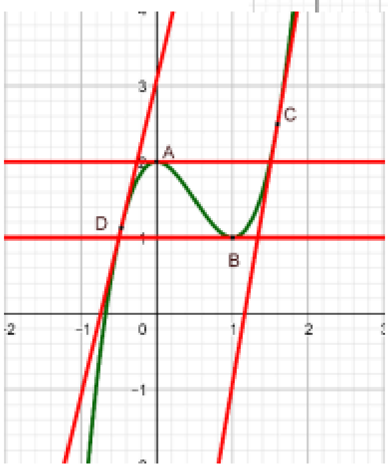
Application :

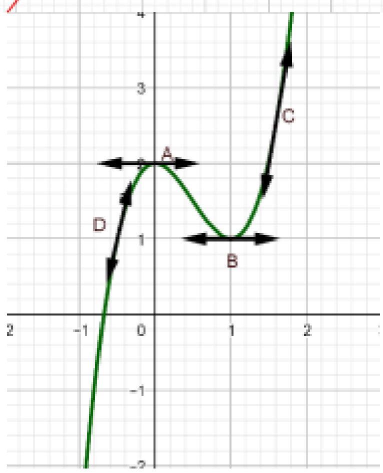
Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x) = 2x^3 - x + 1$ en $A(1, f(1))$

Remarque :



- La tangente (T) à la courbe C_f en $A(a, f(a))$ ce n'est que la droite qui représente la fonction affine tangente à la fonction f en a et qui est $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ et :
$\overline{PM} = f(x) - \left(f'(a)(x - a) + f(a)\right) = \varphi(x)(x - a)$
- En pratique au lieu de représenter la droite (T) ; on représente seulement une partie de (T) avec deux flèches de direction et ceci afin de ne pas trop charger le graphe.





- Cas particulier si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$ alors l'équation de la tangente est $(T): y = f(a)$ c'est une droite parallèle à l'axe (Ox)
- Le vecteur directeur de la tangente en $A(a, f(a))$ est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$, donc pour tracer une tangente on peut seulement à partir de A tracer le vecteur $\vec{u}$

3.2 Demi-tangente.

Par la même façon que le paragraphe précédent on peut montrer le théorème suivant :

Théorème :

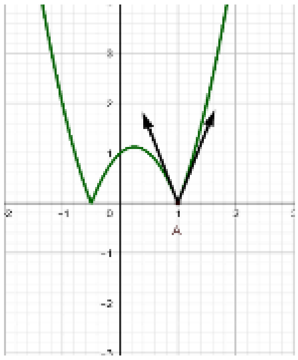
- Si f est une fonction dérivable **à droite** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a (T_d) d'équation : $(T_d)\begin{cases} y = f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ \boldsymbol{x \geq a} \end{cases}$
- Si f est une fonction dérivable **à gauche** de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a (T_g) d'équation : $(T_g)\begin{cases} y = f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ \boldsymbol{x \leq a} \end{cases}$

Exemple :

$f(x) = |-2x^2+x+1|$; On a : f est dérivable à droite de 1 et $f'_d(1) = 3$ (à prouver) et est dérivable à gauche de 1 et $f'_g(1) = -3$

donc la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes en $A(1, f(1))$.

$(T_d)\begin{cases} y = 3(x-1) \\ \boldsymbol{x \geq 1} \end{cases}$ et $(T_g)\begin{cases} y = -3(x-1) \\ \boldsymbol{x \leq 1} \end{cases}$ qu'on peut représenter par :



Remarque :

Dans cet exemple, au voisinage de a, on peut pas confondre la courbe avec un segment (f n'est pas dérivable en a) on dit que **la courbe représente un point anguleux** en $A(1, f(1))$

Exercices :

❶Soit la parabole d'équation $(\mathcal{P})$: $y = x^2$; A un point quelconque sur $(\mathcal{P})$ et (T) la tangente à $(\mathcal{P})$ en A.
Soient M et N les intersections respéctives de (T) avec l'axe (Ox) de (T) avec l'axe (Oy).
Montrer que M est le milieu de $[AN]$.

❷Soit la parabole d'équation $(\mathcal{H})$: $y = \frac{1}{x}$; A un point quelconque sur $(\mathcal{H})$ et (T) la tangente à $(\mathcal{H})$ en A.
Soient M et N les intersections respéctives de (T) avec l'axe (Ox) de (T) avec l'axe (Oy).
Montrer que A est le milieu de $[MN]$.

III) FONCTION DERIVEE D'UNE FONCTION.

1) Introduction

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 + x$.

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+(x+h)-2x^2-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+x+h-2x^2-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(4x+2h+1)}{h} \\
&= 4x+1 \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction f sur** $\mathbb{R}$ et se note par f'.

Activités :

1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$

2) Dérivabilité sur un intervalle.

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a et b deux éléments de D_f tels que :$a < b$

- On dit que f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$
- On dit que f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a
- On dit que f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

Remarque :

Une fonction qui est dérivable sur $[a, b]$ et dérivable $[b, c]$ n'est pas nécessairement dérivable sur $[a, c]$ sauf si $f'_d(b) = f'_g(b)$

3) Fonction dérivée d'une fonction.

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle **ouvert** $\boldsymbol{I}$. La fonction qui associe à tout élément x son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle **la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\boldsymbol{I}$.**

3.1 Fonctions dérivées de quelques fonctions usuelles.

Exercices :

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions :

1. $x \mapsto C$ sur $\mathbb{R}$
2. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
3. $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.
4. $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$.
5. $x \mapsto sinx$ sur $\mathbb{R}$.
6. $x \mapsto cosx$ sur $\mathbb{R}$.

Tableau des dérivées des fonctions usuelles

La fonction f	Sa fonction dérivée f'	Intervalles de dérivation
C	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*+}$et $\mathbb{R}^{*-}$
cos	$-sin$	$\mathbb{R}$
sin	cos	$\mathbb{R}$
$tanx$	$1 + tan^2x$	$]\frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{-\pi}{2} + k\pi[\, , k \in \mathbb{Z}$

Pour $\boldsymbol{x^n}$ et $\boldsymbol{tan}$ on utilisera les opérations sur les fonctions dérivée.

IV) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVEES.

Rappelle

A partir de deux fonctions f et g on peut définir :

- la somme : $(\forall x \in D_f \cap D_g)(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Le produit : $(\forall x \in D_f \cap D_g)(f` \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
- L'inverse : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \neq 0\ \ alors$ $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
- Le quotient : $(\forall x \in D_f \cap D_g)$ $si\ x \neq 0\ \ alors$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
- La racine : $(\forall x \in D_f)$ $si\ x \geq 0\ \ alors$ $(\sqrt{f})(x) = \sqrt{f(x)}$

1) La somme

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f + g)$ en a.

On a : $\lim\limits_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$= f'(a) + g'(a)$$
$$= (f' + g')(a)$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f + g)$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(f + g)' = f' + g'}$$

2) Le produit

Soit f et g deux fonctions dérivables en a, étudions la dérivabilité de la fonction $(f \times g)$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(a)\times g(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)\times g(x)-f(x)\times g(a)+f(x)\times g(a)-f(a)\times g(a)}{x-a} \quad \text{(on a ajouté et retranché le même nombre)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times f(x)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times g(a)\\ &= g'(a)\times f(a)+f'(a)\times g(a) \quad (\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ car } f \text{ est continue})\\ &= (f'g+g'f)(a)\end{aligned}$$

En général : Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors la fonction $(f \times g)$ est dérivable sur I et :

$$\boldsymbol{(f+g)' = f'g+g'f}$$

3) Puissance

On utilisant la propriété précédente et par récurrence prouver que :

$$\boldsymbol{(f^n)' = nf'f^{n-1}}$$

Exemple :

Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x) = (2x^3 - x^2)^4$.

4) L'inverse

Soit f une fonction dérivable en a et $f(a) \neq 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\left(\frac{1}{f}\right)$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x)-\left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)-\left(\frac{1}{f(a)}\right)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(a)-f(x)}{(x-a)(f(x).f(a))}\\ &= \lim_{x\to a} -\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}\times\frac{1}{f(x).f(a)} \quad (\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ car } f \text{ est continue})\\ &= \frac{-f\prime(a)}{f^2(a)}.\end{aligned}$$

En général si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{1}{f}\right)$ est dérivable sur I et

$$\boldsymbol{\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}}$$

5) Quotient :

En remarquant que $\left(\frac{f}{g}\right) = f \times \left(\frac{1}{g}\right)$ et en utilisant les propriétés du produit et de l'inverse on peut montrer que :

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors $\left(\frac{f}{g}\right)$ est dérivable sur I et

$$\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2}}$$

Application :

Montrer que la fonction tan est dérivable sur les intervalles de la forme ;$I_k = \left]\frac{-\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$ et que $(\forall x \in I_k)(tan'x = 1 + tan^2x)$.

6) La racine :

Soit f un fonction dérivable en a et $f(a) > 0$ étudions la dérivabilité de la fonction $\sqrt{f}$ en a.

On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{f})(x)-(\sqrt{f})(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{1}{(\sqrt{f})(x)+(\sqrt{f})(a)} \quad \text{(On a multiplié par le conjuguais)}\\ &= \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}\end{aligned}$$

En générale ; si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et **strictement positif sur I** alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et

$$\boldsymbol{\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}}$$

Exercice : Soit $f(x) = \sqrt{-2x^2 + x + 1}$
Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Tableau des opérations sur les fonctions dérivées

La fonction	Sa fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$f.g$	$f'.g + g'.f$
$\frac{1}{g}$	$\frac{-g'}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'.g - g'.f}{g^2}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Exercices : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$
2. $f_2(x) = (3x^2 + 1)^3.(5x + 1)$
3. $f_3(x) = \frac{3x^3+x}{5x^2+1}$
4. $f_4(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{1+x^2}$
5. $f_5(x) = \frac{\sin(2x)}{1+cos3x}$

Remarque :
Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :

-Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de D_f

-Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = |3x^2 + x - 4|$

Propriété :

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition