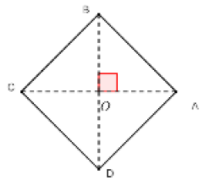
TD :LA ROTATION DANS LE PLAN AVEC CORRECTIONS

Exercice1 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α .

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,

2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=B$?

Comment choisir α pour avoir $r_O(A)=C$?



Solution : $r_A\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r_O(O;\alpha)$

- $r_A(A)=A$ Car le centre est le seul point invariant.
- $r_A(B)=D$ Car $\begin{cases} AB=AD \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$
- $r_A(D)=B'$ avec B' le symétrique de B par rapport a A

2) $r_O(A)=B \Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$

$r_O(A)=C \Leftrightarrow \alpha=\pi$

Exercice2 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

Décomposer la rotation r en composée de deux symétries orthogonales

Solution : $r=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$ car $(AD)\cap(AC)=\{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ OU $r=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$

car $(AB)\cap(AC)=\{A\}$

et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice3 : ABC est un triangle.

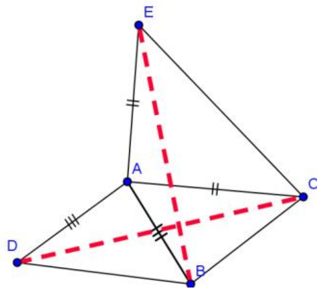
On construit à l'extérieur deux triangles ABD et ACE isocèles et rectangles en A

Solution :

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

On a : $\begin{cases} AD=AB \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc : $r(D)=B$ ❶



On a : $\begin{cases} AC=AE \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc :❷ $r(C)=E$

Et puisque la rotation conserve les distances

Alors de❶ et ❷ en déduit que $BE=CD$

2)on a $r(D)=B$ et $r(C)=E$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{EB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}$ par suite : $(BE)\perp(CD)$

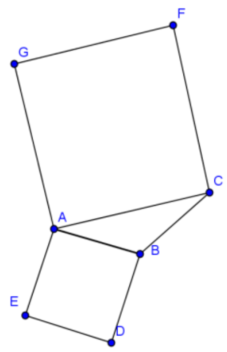
Exercice4 : ABC est un triangle tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ positif. On construit à l'extérieur les carrés $ABDE$ et $ACFG$

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

déterminer : $r(E)$ et $r(C)$

Et Montrer que : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Solution :



on a : $\begin{cases} AE=AB \\ \left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(E)=B$ ❶

Et on a : $\begin{cases} AC=AG \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AG}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : ❷ $r(C)=G$

Et on a : $r(A)=A$ ❸ car A le centre de la rotation

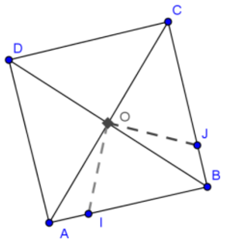
De : ❶et❷ et❸ en déduit que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}\right)[2\pi]$

Exercice5 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ positif.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

Montrer que $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(I)=J$ ؟؟؟؟



On pose : $r(I)=I'$

On a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(A)=B$

Et on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BI'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❶ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ❷

De ❶ et ❷ en déduit que $\overrightarrow{BI'}=\overrightarrow{BJ}$ donc $I'=J$

Donc $r(I)=J$ par suite : $\begin{cases} OI=OJ \\ \left(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Exercice6 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}}\right)$ positif. Soit (D) la droite parallèle a (BD) et coupe (AD) en M et coupe (AB) en N et Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. E et F les images M et N respectivement Par la rotation r

1)Faire une figure et Montrer que $(EF)\perp(MN)$

2)Déterminer l'image de la droite (BD) par la rotation r

3)Montrer que $DN=FA$ et $(EF)\parallel(AC)$

Solution :1)

on a :❶ $r(M)=E$

et : $r(N)=F$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que:

$\left(\overline{\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EF}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc : $(EF)\perp(MN)$

2) on a: $\begin{cases} 0B=0C \\ \left(\overline{\overrightarrow{0B},\overrightarrow{OC}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(B)=C$ ❶

Et on a : $\begin{cases} 0D=0A \\ \left(\overline{\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc $r(D)=A$ ❷

de ❶ et ❷ en deduit que: $r((BD))=(AC)$

3) $DN=FA$ ؟؟؟

on a: ❶ $r(D)=A$ et ❷ $r(N)=F$

donc : $DN=FA$

$(EF)\parallel(AC)$ ؟؟؟

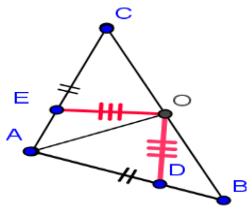
On a : $(MN)\parallel(BD)$ et $r((BD))=(AC)$ et $r((MN))=(EF)$

Donc : $(EF)\parallel(AC)$ car la rotation conserve le parallélisme

Exercice7 : ABC est un triangle isocèles et rectangles en A tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ positif et O le milieu du segment $[BC]$.D et E deux points tels que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Montrer que ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Solution : il suffit de montrer que **:** $r(E)=D$ ؟؟؟؟



On pose : $r(E)=E'$

On a : $\begin{cases} OA=OC \\ \left(\overline{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : $r(C)=A$ ❶

Et on a : $\begin{cases} OA=OB \\ \left(\overline{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A)=B$ ❷

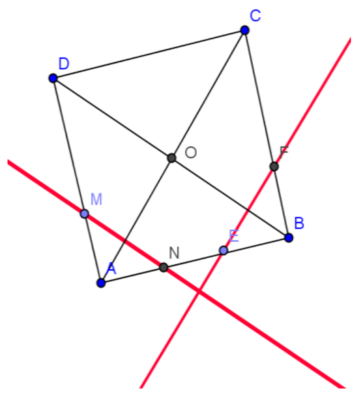
Et on a : $\overrightarrow{CE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ ❸

De ❶et❷et❸: en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❹ car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Et on sait que : $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ ❺

De❹et ❺ en déduit que : $\overrightarrow{AE'}=\overrightarrow{AD}$ cad $E'=D$

Donc : $r(E)=D$ par suite : $\begin{cases} OE=OD \\ \left(\overline{\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

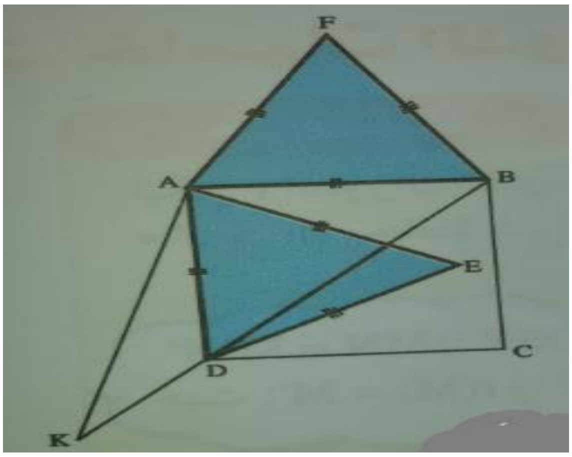


Donc ODE est un triangle isocèles et rectangles en O

Exercice8 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right)$ positif. et AED et AFB deux triangles équilatéraux

Montrer que les points : E et C et F sont alignés

Solution : soit r la rotation de centre A et



d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r\left(A;\frac{\pi}{3}\right)$

et soit K l'antécédent de C par r

On a : $r(B)=F$

Car $\begin{cases} AB = AF \\ \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(D)=E$ Car $\begin{cases} AD = AE \\ \left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$

Et on a : $r(K)=C$

donc : $AK = AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

puisque : $AB = BC$ donc B appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et $AD = DC$ donc D appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

et on a : $AK = AC$ et $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

donc : AKC est équilatéral donc K appartient à la médiatrice du segment $[AC]$

Donc les points : K et B et D sont alignés
Et puisque la rotation conserve les alignement des points alors :les points : E et C et F sont alignés

Exercice9 : ABCD est un carré tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ positif et Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1)déterminer la nature de la transformation suivante : $S_{(AD)} \circ S_{(AB)}$

1)on considère les rotations suivantes : $r\left(A;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r'\left(B;\frac{\pi}{2}\right)$ et $r''\left(C;-\frac{\pi}{2}\right)$

déterminer la nature des transformations suivante : $r \circ r'$ et $r \circ r''$

Solution :1) $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} = r\left(A;2\frac{\pi}{2}\right) = r(A;\pi) = S_A$

2) a) $r \circ r'$ on a $A \neq B$ et $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi \neq 2k\pi$ donc c'est une rotation $r\left(?;\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = r(?;\pi)$ cad une symétrie central

Déterminons le centre de la rotation $r \circ r'$?

On a : $r \circ r' = S_{(AC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$

Et puisque : $(AC) \cap (BD) = \{O\}$

Alors le le centre de la rotation est le point O

2) b) $r \circ r''$???

on a $A \neq C$ et $\frac{\pi}{2}+\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc c'est une translation

Déterminons le vecteur de la translation $r \circ r''$?

On a : $r \circ r''(C) = r\left(r''(C)\right) = r(C) = C'$

Avec : $\begin{cases} AC = AC' \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc $r \circ r''$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$

Exercice10 : ABCD est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{0A},\overrightarrow{0B}\right)$ négatif. Soient M, N, P et Q quatre points dans le plan tels que : $\overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

la droite (AN) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en E et F

la droite (CQ) coupe les droites (DM) et (BP) Respectivement en H et G

Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$

1)Faire une figure dans le cas ou : $AB = 6cm$

2)Montrer que : $r(M) = N$ et $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a)Montrer que : $r(F) = G$

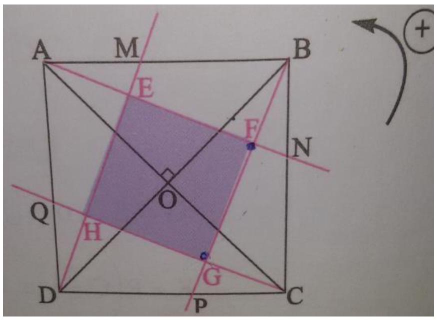
b)en déduire que : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) calculer : $(r \circ r)(F)$ et $(r \circ r)(E)$

4)b) en déduire que :les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont le même milieu

5) Montrer que : EFGH est un carré

Solution :1)



2) on a $\begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(A) = B$

$\begin{cases} OB = OC \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ donc : $r(B) = C$

Et puisque $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{r(A)r(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{r(A)r(B)}$

cad : $\overrightarrow{Br(M)} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et on a : $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

donc : $r(M) = N$

de meme : on montre que : $r(N) = P$ et $r(P) = Q$ et $r(Q) = M$

3) a)on montre que : $r(F) = G$?

Puisque : $r(N) = P$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et Puisque : $r(P) = Q$ et $r(A) = B$ alors : $r((AN)) = (BP)$

Et puisque : $r(P) = Q$ et $r(B) = C$ alors : $r((BP)) = (QC)$

Donc : $r((AN) \cap (BP)) = r((AN)) \cap r((BP))$ car r est une application injective

Donc : $r(\{F\}) = (BP) \cap (QC) = \{G\}$ par suite : $r(F) = G$

3)b)On a : $r(F) = G$ donc : $\begin{cases} OF = OG \\ (\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OG}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Donc : le triangle FOG est isocèle et rectangle en O

4)a) On a : $r(C) = D$ et $r(Q) = M$ et $r(B) = C$

donc : $r((CQ)) = (DM)$ et puisque : $r((BP)) = (QC)$

alors : $r((CQ) \cap (BP)) = (DM) \cap (CQ)$ cad :

$r(\{G\}) = \{H\}$ donc : $r(G) = H$

on a : $(r \circ r)(F) = r(r(F)) = r(G) = H$ et on a :

$r((AN)) = (BP)$ et $r((DM)) = (AN)$

donc : $r((AN) \cap (DM)) = (AN) \cap (BP)$

donc : $r(E) = F$

On a : $(r \circ r)(EF) = r(r(E)) = r(F) = G$

4)b)puisque r est une rotation d'angle : $-\pi/2$ alors : $r \circ r$ est une rotation d'angle : $2 \times (-\pi/2) = -\pi$ donc $r \circ r$ est une symétrie central et soit K son centre

Puisque on a : $(r \circ r)(F) = H$ et $(r \circ r)(E) = G$

Alors : K est le milieu des segments $[EG]$ et $[FH]$

Donc : les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux

4) puisque les segments $[EG]$ et $[FH]$ ont les mêmes milieux alors : $EFGH$ est un parallélogramme et on a aussi : $r(F) = G$ et $r(E) = F$ donc : $EF = FG$ et $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FG}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc : EFGH est un carré.

Exercice11 : ABCD est un carré de centre O tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \pi/2[2\pi]$. Soient I, J, K et L les milieux respectivement des segments $[AB]$ et $[BC]$ et $[CD]$ et $[DA]$.

1)Déterminer les mesures des angles suivants :

a) $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ b) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ c) $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ d) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})$

2)soit $S_{(AB)}$ la symétrie axiale d'axe (AB)

soit $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$ la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$

et $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

a) $F = S_{(AC)} \circ S_{(BD)}$ b) $G = S_{(AC)} \circ S_{(AB)}$

c) $H = r_{(D;\pi)} \circ r_{(A;\pi)}$ d) $K = r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)} \circ r_{(D;\pi)} \circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$

Solution :1) a)les droites (AC) et (BD) et (JL) et (IK) sont des axes de symétries du carré ABCD

On a : $S_{(AC)}(A) = A$ et $S_{(AC)}(C) = C$ et $S_{(AC)}(B) = D$

Donc on deduit que : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[2\pi]$

Donc : $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a : $S_{(LJ)}(A) = D$ et $S_{(LJ)}(C) = B$ et $S_{(LJ)}(B) = C$

Donc on deduit que : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Puisque la rotation conserve la mesure de l'angle orienté et on a : $r_{(O;\pi)}(A)=C$ et $r_{(O;\pi)}(B)=D$ et $r_{(O;\pi)}(C)=A$ alors : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

d) puisque : $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ alors : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

2)a) $F=S_{(AC)}\circ S_{(BD)}$??

On a : $(AC)\cap(BD)=\{O\}$

Donc F est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en O
Donc : F est rotation de centre O
Et puisque : $(AC)\perp(BD)$ alors : F est une symétrie central de centre O ou $F=r_{(O;\pi)}$

2)b) $G=S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$??

On a : $(AB)\cap(AC)=\{A\}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc G est la composé de deux symétries orthogonaux d'axes qui se coupent en A
Donc : G est rotation de centre A

$G=r_{\left(O;2\frac{\pi}{4}\right)}=r_{\left(O;\frac{\pi}{2}\right)}$

2)c) $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ et $r_{(A;\pi)}=S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Donc : $H=r_{(D;\pi)}\circ r_{(A;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(DA)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $S_{(DA)}\circ S_{(DA)}=I_P$ alors : $H=S_{(DC)}\circ S_{(AB)}$

Et puisque : $(DC)\parallel(AB)$ alors : H est une translation et puisque : $A\in(AB)$ et D la projection du point D sur la droite (DC) alors :

$S_{(DC)}\circ S_{(AB)}=t_{2\overrightarrow{AD}}$ donc : $H=t_{2\overrightarrow{AD}}$

d) $K=r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}\circ r_{(D;\pi)}\circ r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}$??

Puisque toute rotation est le composé de deux symétries axiales on peut en déduire :

$r_{\left(C;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}$ et $r_{(D;\pi)}=S_{(DC)}\circ S_{(DA)}$ car

$\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CA}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Et on a : $r_{\left(A;\frac{\pi}{2}\right)}=S_{(AD)}\circ S_{(AC)}$

Donc :

$K=S_{(CA)}\circ S_{(CD)}\circ S_{(DC)}\circ S_{(AD)}\circ S_{(AC)}=S_{(CA)}\circ I_P\circ I_P\circ S_{(AC)}$

$K=S_{(CA)}\circ S_{(AC)}=I_P$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien