PROF: ATMANI NAJIB

LIMITES – EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=-x^4$ 3) $f(x)=-3+\frac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x)=-x^3$ 5) $f(x)=5+\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\sqrt{-x}$

Déterminez les limites suivantes

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-\frac{1}{x})$ 8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-4+\frac{1}{x})$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{x-4}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{-2+\frac{3}{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(-x+1)$ 13) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-3t(t-4)\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\frac{1}{x}+3\right)$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

15) $f(x)=\frac{1}{x-2}$, $a=2$ 16) $f(x)=\frac{-2}{x+3}$, $a=-3$ 17) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $a=0$

Exercice n°2.

Déterminer les limites de $f(x)=\frac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x=2$ et $x=-1$.

Exercice n°3.

Déterminez les limites suivantes

1) $f(x)=\sqrt{\frac{2x^2-1}{x}}$ en $+\infty$ 2) $g(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

Exercice n°4.

Vrai ou Faux ?

1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n°5.

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x)=ax+\frac{2}{x-b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to5}f(x)=11$

Exercice n°6. Déterminez les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-2x+10$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3+5x-2$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8x^3+1}{4x+16}$ 5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Exercice n°7.

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et telles que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=7$

Exercice n°8.

Déterminez les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+3}-\sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+3}-(x+2)$

Exercice n°9.

1) Soit f une fonction telle que pour tout x>1, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout x>1, $\frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

3) $f(x) \geq 2x-3$ 4) $f(x) \geq x^2-3$

Exercice n°10.

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x-\sqrt{x}+4$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Exercice n°11.

Soit la fonction f définie sur $D=[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout x de D, on a : $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice n°12.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x)=2x-\sin x$

1) Montrer que pour tout x réel $2x-1 \leq f(x) \leq 2x+1$

2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n°13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent): 1) $f(x)=\dfrac{1+\cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$;

Exercice n°14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

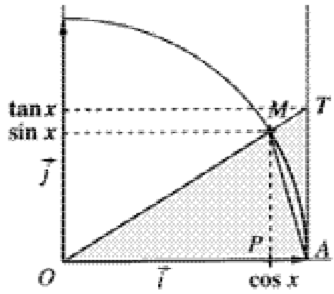
1) Montrer que pour x>0 , $x^2 < 1+x^2 < (1+x)^2$

2) En déduire pour x>0 un encadrement de $f(x)$.

3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n°15.

Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(1;0), M(cos x;sin x), P(cos x;0) et T(1;tan x). Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.

2) En déduire que $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

3) Déterminer la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice n°16.

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (cf exercice précédent), étudiez les limites en 0 des fonctions :

1) $x\longrightarrow\dfrac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x\longrightarrow\dfrac{x}{\sin 3x}$ 3) $x\longrightarrow\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x\longrightarrow\dfrac{\tan x}{x}$

Exercice n°17.

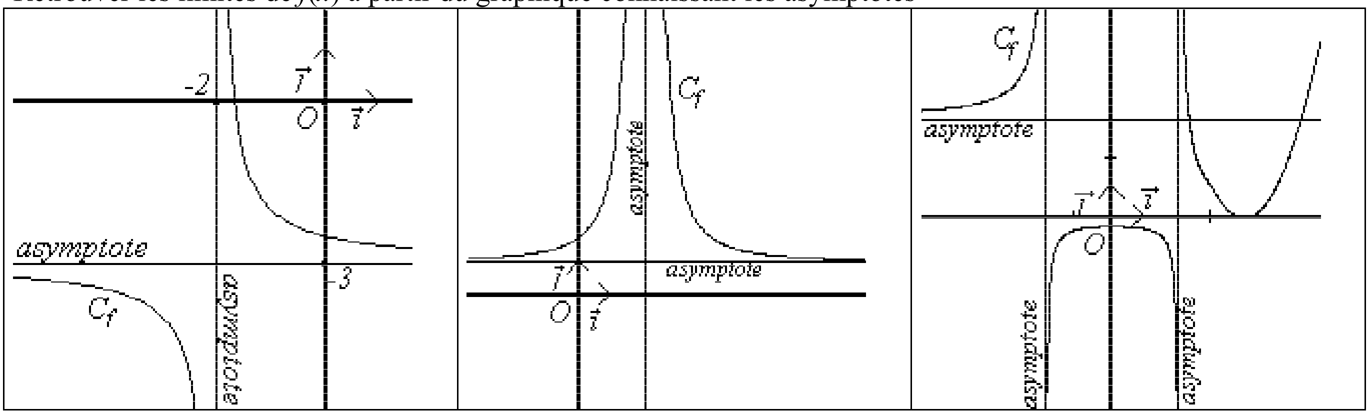
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Exercice n°18.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}$

Exercice n°19.

Retrouver les limites de *f*(*x*) à partir du graphique connaissant les asymptotes

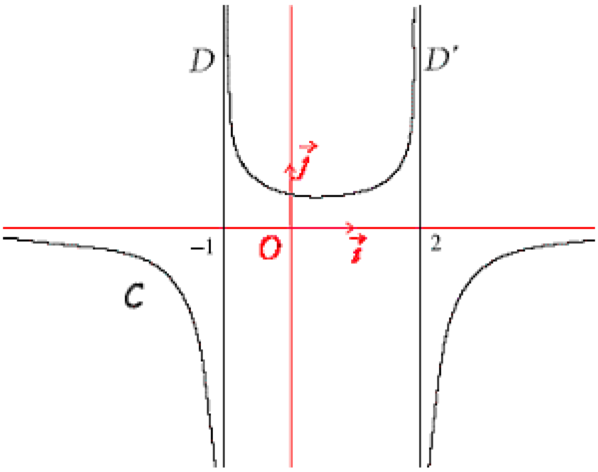


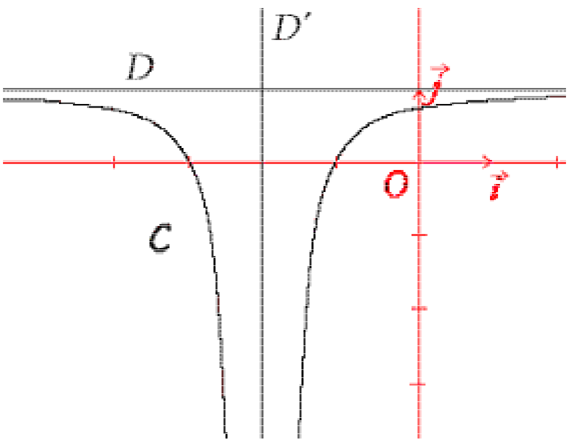
Exercice n°20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1^er^ cas $f_1(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

2^ème^ cas $g_1(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$





Exercice n°21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}$ 2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 5) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Exercice n°22.

Soit f la fonction $f(x)=2x+1+\frac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n°23.

Soit f la fonction $f(x)=\frac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Déterminez trois nombres réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$ pour $x\neq -2$
2) Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n°24.

Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}$

Exercice n°25.

Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote pour $x\to+\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur ↙↗ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

Exercice n°26.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Déterminez trois réels a, b et c tels que pour tout x de D, on ait : $f(x)=ax^2+b+\frac{c}{x+3}$
3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}}f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax^2+b))$
4) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=x^2-4$. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x.

Exercice n°27.

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{\left(50+x^{20}\right)^2-2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

1) Peut-on conjecturer la limite de f en zéro ?
2) En développant $\left(50+x^{20}\right)^2$, simplifier l'expression de *f(x)* pour $x\neq 0$. Calculer alors la limite de f en zéro. Surprenant, non ?

Exercice n°28.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln 2-3\ln x\right)$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x-4+\ln x\right)$ 5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x^2$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{x}$ 7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\ln x$ 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ (Poser $X=\frac{1}{x}$) 9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X=2x$)

Exercice n°29.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+e^x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+4e^x\right)$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-3e^x\right)$

Exercice n°30.

Etudiez les limites de la fonction f donnée aux bornes de son ensemble de définition D, et trouver les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.

1) $f(x) = e^{-x} - 4$ 2) $f(x) = \dfrac{3}{1+e^{x}}$ 3) $f(x) = x - 2 + xe^{x}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x} - 1}$

Exercice n°31.

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$.

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$

2) Montrer que $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$, et calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

3) En déduire l'existence de deux asymptotes de la courbe C.