TD LIMITE D'UNE FONCTION
EXERCICES D'PPLICATIONS ET DE REFLEXIONS

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2 :1)monter que : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$

2)a)monter que : $\forall x \in \left]-1;1\right[\ : \left|x^2+5x\right| \le 6|x|$

b)Calculer $\lim\limits_{x\to 0} x^2+5x$

Exercice3 :monter que: $\lim\limits_{x\to 0} 2+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2$

Exercice4 :monter que: $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$

Exercice5 :étudier la limite de la fonction :

$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

Exercice6 : Soit la fonction définit par :

$f(x) = x^2+3x+2$

monter que : $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 6$

Exercice7 : Soit la fonction définit par :

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

monter que : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{1}{3}$

Exercice8 : Soit la fonction $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - E(x) \end{array}$

Où E désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles]0,1[et]1,2[.

2- Construire la courbe de la restriction de f sur [0,2].

3- La fonction f admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x) = x$ et $h(x) = x - 1$

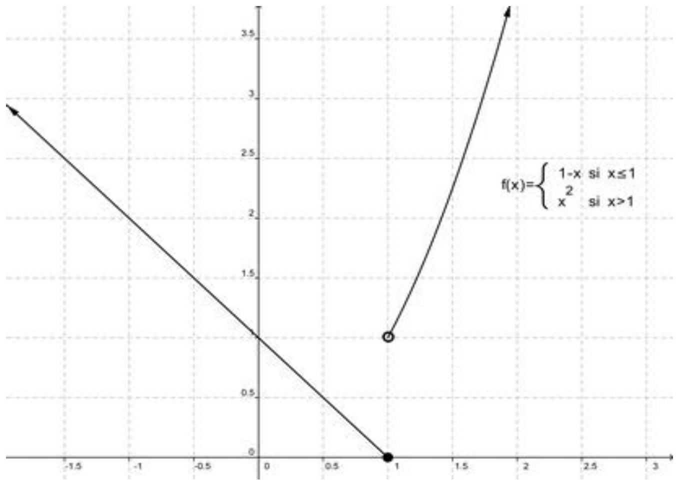
a) Remarquer que f et g sont confondues sur]0,1[et que f et h sont confondues sur]1,2[

b) déterminer les limites de g et de h en 1.

Exercice9 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)$

Exercice10 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1 - x \ si \ x \le 1$

$x \mapsto x^2 \ si \ x \succ 2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice11 : Soit la fonction g définie par :

$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \ si \ x \ge 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \ si \ x < 1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Exercice12 : Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Exercice13 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{-3}{x^2+2}$

déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Exercice14 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

Exercice15 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto \left(x^2+x^4\right)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$

Exercice16 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2+5x+1$

déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)$

Exercice17 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x+\sin x-1$

déterminer : $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right)$

Exercice18 : Soit $f\left(x\right)=\dfrac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $f\left(x\right)\geq \dfrac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim\limits_{x\to 0} f\left(x\right)$

Exercice19 : déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2-\sqrt{x}$

Exercice20 : déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} x^2+x+2+\dfrac{1}{x^2}$

Exercice21 : déterminer :

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+1}{\left(x-1\right)^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3+1}{\left(x-1\right)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} 2x^3+x^2-x+4$

Exercice22 : calculer $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{3x+1}{x^2+x-2}$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to +\infty} 2x+5x^2-7x^4$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

Exercice24 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

Exercice25 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\sin x}{x^2\left(2+\cos x\right)}$

4) $\lim\limits_{x\to -\infty} 1+\dfrac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

Exercice26 : Soient les fonctions tels que :

$f\left(x\right)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g\left(x\right)=\dfrac{-2x^2+1}{\left(x-3\right)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k\left(x\right)=\dfrac{-3x+1}{x\left(x-2\right)}$ et $h\left(x\right)=\dfrac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right)$

2)Déterminer : $\lim\limits_{x\to +\infty} g\left(x\right)$ et $\lim\limits_{x\to 3} g\left(x\right)$

3)Déterminer : $\lim\limits_{x\to 0} h\left(x\right)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Exercice27 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

« C’est en forgeant que l’on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C’est en s’entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l’on devient un mathématicien