

LIMITES – CORRECTION

Exercice n°1

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$ donc par multiplication $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^4 = -\infty$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(⚠ ne pas confondre $-x^4$ et $(-x)^4 = x^4$)

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3 + \frac{1}{x} = -3$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \frac{1}{x} = 5$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ donc par composition avec la fonction racine, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 - \frac{1}{x} = +\infty$

8) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 - 4 = 0 - 4 = -4$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc par somme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 - 4 + \frac{1}{x}) = +\infty$

9) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 3 = -\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + x - 3) = -\infty$

10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 4 = -\infty$ donc par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x - 4} = 0$

11) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \frac{3}{x} = -2$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$. Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-2 + \frac{3}{x}} = -\infty$

12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty$ donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(-x + 1) = -\infty$

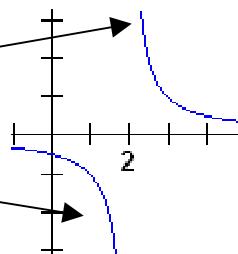
13) $\lim_{t \rightarrow -\infty} -3t = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} t - 4 = -\infty$ donc par produit $\lim_{t \rightarrow -\infty} (-3t(t - 4)) = -\infty$

14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + 3 = 3$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$) donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\frac{1}{x} + 3) = -\infty$

15) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ (car $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$) donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x - 2} = +\infty$. De la même manière $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x - 2 = 0^-$ (car

$x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$) donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x - 2} = -\infty$.

Les limites « à gauche » et « à droite » de 2 diffèrent.



16) $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} x + 3 = 0^+$ (car $x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0$) donc par quotient (attention à la règle des signes !), $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{-2}{x + 3} = -\infty$.

De la même manière $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} x + 3 = 0^-$ (car $x < -3 \Leftrightarrow x + 3 < 0$) donc par quotient, $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} \frac{-2}{x + 3} = +\infty$.

17) Puisque pour tout réel x on a $x^2 \geq 0$, on a donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^2 = 0^+$ ainsi que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ainsi que

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Les limites à gauche et à droite de 0 sont ici identiques.

Exercice n°2

Il est clair que $\lim_{x \rightarrow -1} (x+1)(x-2) = 0$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(x-2) = 0$, mais encore faut-il connaître le signe de l'expression $D(x) = (x+1)(x-2)$.

Un tableau de signes nous fournit :

$$D(x) < 0 \text{ si } x \in]-1; 2[$$

$$D(x) > 0 \text{ si } x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$$

Ainsi,

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
$(x+1)(x-2)$	+	0	-	0

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} (x+1)(x-2) = 0^+. \text{ Comme } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} x = -1, \text{ on conclut, par quotient, que } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (x+1)(x-2) = 0^-, \text{ donc par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (x+1)(x-2) = 0^-. \text{ Comme } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x = 2, \text{ on conclut, par quotient, que } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x+1)(x-2) = 0^+, \text{ donc par quotient, } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x}{(x+1)(x-2)} = +\infty$$

Exercice n°3

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty. \text{ En notant } u = \frac{2x^2 - 1}{x} \text{ on a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} u = +\infty \text{ et puisque } \lim_{u \rightarrow +\infty} \sqrt{u} = +\infty, \text{ en}$$

$$\text{composant, on obtient } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 - 1}{x}} = +\infty$$

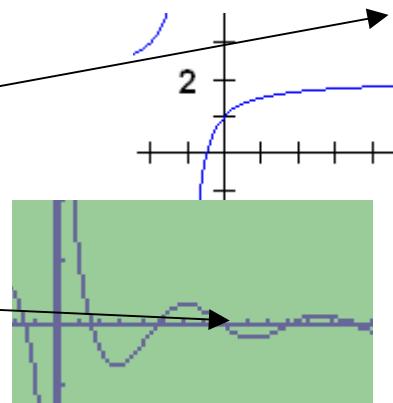
$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0. \text{ En notant } u = \frac{1}{x} \text{ on a donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} u = 0 \text{ et puisque } \lim_{u \rightarrow 0} \cos(u) = 1, \text{ en composant, on obtient } \lim_{x \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

Exercice n°4

1) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$ est strictement croissante sur $[0; +\infty]$, positive, et pourtant $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

2) FAUX. Par exemple, la fonction définie sur $]0; +\infty]$ par $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ vérifie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (par encadrement, voir exercice n°), et pourtant sa courbe C_f « oscille » autour de 0.

Cela signifie que les nombres réels $f(x)$ ne sont pas tous de même signe



3) VRAI. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$, cela signifie que tout intervalle centré en -1 contiendra toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. Ainsi, pour x suffisamment grand, on aura, par exemple $-1,5 \leq f(x) \leq -0,5$ donc les nombres $f(x)$ seront tous de même signe

Exercice n°5

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3a + \frac{2}{3-b}$, pour avoir $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, il est nécessaire d'avoir $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2}{x-b} = +\infty$, c'est-à-dire

$\lim_{x \rightarrow 3^+} x-b = 0^+$, donc $b=3$. Ainsi, pour tout $x \neq 3$, $f(x) = ax + \frac{2}{x-3}$ et l'information $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 11$ fournit l'indication

$$f(5) = 11 \Leftrightarrow 5a + \frac{2}{5-3} = 11 \Leftrightarrow 5a = 10 \Leftrightarrow a = 2$$

Exercice n°6

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + 10 = -\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1^{ère} manière :

Puisque $x \rightarrow +\infty$, on peut supposer $x \neq 0$

Alors $3x^2 - 2x + 10 = x^2 \left(3 - \frac{2}{x^2} + \frac{10}{x^2} \right) = x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right)$ (factorisation par le terme de plus haut degré puis simplification).

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x^2} = 0$, on a, par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right) = 3$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, on conclut, par

produit, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{10}{x^2} \right) = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

Remarque : Plutôt que de mettre x^2 en facteur dans l'expression $3x^2 - 2x + 10$, on aurait pu mettre $3x^2$ en facteur, de sorte que $3x^2 - 2x + 10 = 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x^2} + \frac{10}{3x^2} \right) = 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right)$. On raisonne de la même manière, à savoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x} = 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{3x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right) = 1$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$, on conclut, par produit, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{10}{3x^2} \right) = +\infty$, c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = +\infty$

2^{ère} manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'un polynôme est la même que celle de son terme de plus haut degré ».

On écrit donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 2x + 10 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$

2) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x - 2 = -\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 + 5x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4x^3 = +\infty$

3) On examine les numérateurs et dénominateurs. On trouve $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$. On se trouve dans

le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Il existe (au moins) deux manières de rédiger :

1^{ère} manière :

Factorisation des deux membres par leur terme de plus haut degré :

Puisque $x \rightarrow +\infty$, on peut supposer $x \neq 0$

Alors $\frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 + \frac{4}{x^2} = 3$ (par somme), et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ (par somme), on déduit, par quotient, que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$ c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = 3$

2^{ère} manière :

On utilise un résultat du cours stipulant que « la limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) est la même que celle du quotient simplifié de leurs termes de plus haut degrés respectifs »

On écrit donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$

4) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} -8x^3 + 1 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4x + 16 = -\infty$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Le résultat du cours nous indique que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x^3 + 1}{4x + 16} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8^2 x^{3-2}}{4x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty$

5) Puisque $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - x - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ pour «résorber» la forme indéterminée.

Pour tout $x \neq 2$, grâce au calcul de $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$ on détermine les racines du trinôme : $x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{2} = -1$ et

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{2} = 2$. La forme factorisée du trinôme nous permet de simplifier la fraction :

$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ donc $\frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = x + 1$ On conclut que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3$

6) Puisque $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 2x - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 - x - 1 = 0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Grâce aux calculs des discriminants, on peut factoriser numérateur et dénominateur :

Pour tout $x \neq 1$, $\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{2(x - 1)\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \frac{x + 3}{2\left(\frac{x+1}{2}\right)}$ donc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 3}{2\left(\frac{x+1}{2}\right)} = \frac{5}{2\left(\frac{2+1}{2}\right)} = 1$

7) Puisque $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} - 3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 9} x - 9 = 0$, on se retrouve dans le cas d'une forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

Il va falloir transformer l'écriture de $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ pour «résorber» la forme indéterminée.

Pour tout $x \neq 9$, $\frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x})^2 - 3^2} = \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 3}$, donc $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$.

Exercice n°7

1) On peut par exemple prendre $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$

2) On peut par exemple prendre $f(x) = 7x$ et $g(x) = x$

Exercice n°8

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} &= \sqrt{x+3} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+3})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} + \sqrt{x} = +\infty$, et par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0$,

c'est à dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 0$

2) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} = +\infty$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 4x + 3 = +\infty$) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+2) = -\infty$, on est en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». Pour résorber cette forme indéterminée, on utilise la technique de multiplication par la quantité conjuguée : Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2) &= \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2) \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2) \right) \left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2) \right)}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2 + 4x + 3} \right)^2 - (x+2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} = \frac{x^2 + 4x + 3 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} \end{aligned}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+2 = +\infty$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} + x+2 = +\infty$, et par quotient,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 3} + (x+2)} = 0, \text{ c'est à dire } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2) = 0$$

Exercice n°9

- 1) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- 2) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$, d'après le théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$
- 3) Si $f(x) \geq 2x - 3$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On ne peut rien conclure de plus.
- 4) Si $f(x) \geq x^2 - 3$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 = +\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On peut également utiliser ce théorème lorsque $x \rightarrow -\infty$. En effet puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 = +\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. On ne peut rien conclure de plus.

Exercice n°10

- 1) Pour tout $x \in [0; +\infty[$, on calcule $f(x) - 3\sqrt{x} = x - \sqrt{x} + 4 - 3\sqrt{x} = x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x} - 2)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul, on en déduit que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $f(x) - 3\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 3\sqrt{x}$

- 2) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3\sqrt{x} = +\infty$, on en conclut, par utilisation du théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n°11

- 1) Par multiplication par la quantité conjuguée, pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x+2} - \sqrt{x} = \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+2-x}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

2) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a clairement $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \geq 0$ car $\sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x+2} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow f(x) &\leq \frac{2}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

3) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

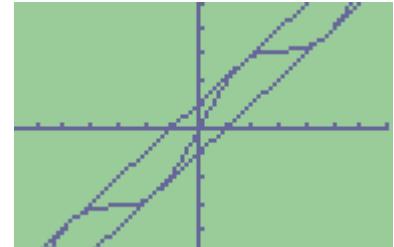
Exercice n°12

1) Pour tout x réel $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1 \Leftrightarrow x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$

2) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, on conclut, en utilisant le théorème de minoration,

que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$, on conclut, en utilisant

le théorème de minoration, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.



Exercice n°13

1) Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \cos x \leq 1$, alors pour tout $x > 0$, on a $1 - 1 \leq 1 + \cos x \leq 1 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \cos x \leq 2$, et par division par \sqrt{x} qui est > 0 , on déduit que $\frac{0}{\sqrt{x}} \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1 + \cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, en application du théorème d'encadrement « des gendarmes », on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

2) Commençons par la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$. On peut donc supposer que $x > 0$.

Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x > 0$, on a $\frac{-x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La limite lorsque $x \rightarrow -\infty$ se traite à l'identique : on peut donc supposer que $x < 0$.

Puisque pour tout réel x , on a $-1 \leq \sin x \leq 1$, alors pour tout $x < 0$, on a $\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x \sin x}{x^2 + 1} \leq \frac{-x}{x^2 + 1}$ (l'inégalité est en sens inverse de la précédente)

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$, et puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », on conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Exercice n°14

1) Pour $x > 0$ $0 < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1 + x^2$. De plus $(1+x)^2 = 1 + x^2 + 2x > 1 + x^2$ car $x > 0$. L'encadrement est ainsi démontré.

2) La fonction racine étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on déduit de l'encadrement $x^2 < 1 + x^2 < (1+x)^2$ que

$$\sqrt{x^2} < \sqrt{1 + x^2} < \sqrt{(1+x)^2} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{1 + x^2} < |1+x|$$

Ne pas oublier que $\sqrt{x^2} = |x|$

Puisque $x > 0$ et $1+x > 0$, on a donc $x < \sqrt{1 + x^2} < 1 + x$, et enfin par division par x , $\frac{x}{x} < \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x} < \frac{1+x}{x} \Leftrightarrow 1 < f(x) < 1 + \frac{1}{x}$

3) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$, en application du théorème « des gendarmes », on conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

Exercice n°15

1) On a clairement $A_1 < A_2 < A_3$

On calcule : $A_1 = \frac{OA \cdot PM}{2} = \frac{1 \cdot \sin x}{2}$, puis par proportionnalité de l'aire et de la mesure du secteur angulaire, $A_2 = \frac{x}{2}$ (car un angle de 2π rad correspond à une aire de $\pi r^2 = \pi cm^2$, donc un angle de x rad correspond à une aire de $x \cdot \frac{\pi}{2\pi} = \frac{x}{2}$). Enfin $A_3 = \frac{OA \cdot AT}{2} = \frac{1 \cdot \tan x}{2} = \frac{\tan x}{2}$

Puisque $A_1 < A_2 < A_3$ alors $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$.

En multipliant les trois membres de l'inégalité par 2, on obtient le résultat attendu.

2) En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $\sin x < x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car $x > 0$)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité, on a $x < \tan x \Leftrightarrow x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car $x > 0$)

3) Puisque pour tout $x > 0$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, on en conclut en application du théorème d'encadrement dit « des gendarmes », que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

4) si $x < 0$, la configuration des triangles et des secteurs angulaires reste la même, mais les mesures de l'aire (qui doivent être positives !) sont alors égales à $A_1 = -\frac{\sin x}{2}$, $A_2 = -\frac{x}{2}$ et $A_3 = -\frac{\tan x}{2}$

On a donc, pour $x < 0$, $-\frac{\sin x}{2} < -\frac{x}{2} < -\frac{\tan x}{2} \Leftrightarrow -\sin x < -x < -\tan x$.

En utilisant les deux premiers termes de l'inégalité, on a $-\sin x < -x \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{-x} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{x} < 1$ (car $-x > 0$)

En utilisant les deux derniers termes de l'inégalité :

on a $-x < -\tan x \Leftrightarrow -x < \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{-\sin x}{-x} \Leftrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$ (car $-x > 0$).

La conclusion de l'exercice reste la même

Exercice n°16

1) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\sin 5x}{2x} = \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sin 5x}{5x}$. En posant $u = 5x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} u = 0$, et puisque $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$,

on en déduit donc que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$, donc par produit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} = \frac{5}{2}$

2) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3} \frac{3x}{\sin 3x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, on a aussi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$, donc en particulier $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x} = 1$ (quitte à poser $u = 3x$), d'où, par produit, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x} = \frac{1}{3}$

3) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \cdot \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x}$. Encore une fois, puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin 4x} = 1$, on conclut, par produit, que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x} = \frac{5}{4}$

4) On écrit, pour tout $x > 0$, $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x \cos x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$

Exercice n°17

1) Si on pose $f(x) = \sqrt{x+6}$, définie sur $[-6; +\infty]$, puisque $f(3) = \sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$, la limite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}$ se réécrit

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$. Or f est dérivable sur $]-6; +\infty[$ et pour tout $x \in]-6; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+6}} = \frac{1}{6}. Ainsi \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \frac{1}{6}$$

2) Si on pose $f(x) = \sin x$, définie sur \mathbb{R} , puisque $f(0) = \sin 0 = 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ se réécrit $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Or f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos x$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = \cos 0 = 1$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

3) Si on pose $f(x) = \cos x$, définie sur \mathbb{R} , puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, la limite $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$ se réécrit

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}}. Or f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\sin x donc$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1. Ainsi \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1.$$

Exercice n°18

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ - Si on pose $f(x) = \tan x$, alors $f(0) = 0$, et ainsi $\frac{\tan x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

Puisque f est dérivable en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1 + \tan^2(0) = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ - Si on pose $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f(1) = 1$, et ainsi $\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

Puisque f est dérivable en 1, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{6x - \pi}$ - On commence à écrire $\frac{2\cos 2x - 1}{6x - \pi} = \frac{2}{6} \cdot \frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$. Pour étudier $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}}$, on pose

$$f(x) = \cos 2x.$$

Ainsi $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, et ainsi $\frac{\cos 2x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$.

Puisque f est dérivable en $\frac{\pi}{6}$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$,

et ainsi $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x - 1}{6x - \pi} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice n°19

1) Sur le premier graphique, on « lit » que la droite d'équation $y = -3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$. De plus, la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C_f , et les limites diffèrent à droite et à gauche de -2. Cela signifie que $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$

2) Sur le deuxième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$. De plus, la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f , et les limites à droite et à gauche de 2 sont identiques. Cela signifie que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$

3) Sur le troisième graphique, on « lit » que la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f uniquement en $-\infty$. Cela signifie que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. De plus, la courbe C_f possède deux asymptotes verticales : les droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$. Les limites à droite et à gauche de ces valeurs sont différentes. Cela signifie que $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$ ainsi que $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

Exercice n°20

1) La première courbe correspond à $f_3(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)}$ car elle présente deux asymptotes verticales synonymes de valeurs interdites égales à -1 et 2, ce qui ne correspond pas à $f_1(x)$. De plus, la courbe se situant en dessous de l'axe des abscisses en $+\infty$ et en $-\infty$, on devrait avoir une fonction « négative » dans ces deux voisinages, ce qui n'est pas le cas de $f_2(x)$

2) La limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction étant égale à 1, on peut éliminer directement $g_1(x)$ et $g_3(x)$, pour ne garder que $g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$

Exercice n°21

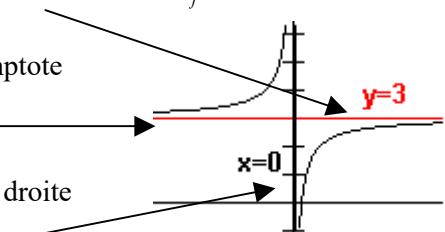
$$1) \text{ Pour tout } x \neq 0, f(x) = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x}$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

De même, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \frac{1}{x} = 3$ donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

De plus, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 3 - \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 3 - \frac{1}{x} = +\infty$ donc la droite

d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f .



2) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est

asymptote verticale à C_f .

3) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x+2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x+2} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote

verticale à C_f .

4) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à C_f .

Enfin $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty$

donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f .

5) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et de même $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Les racines du dénominateur sont 1 et 2. On a donc

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$ donc la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à C_f . Enfin

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{2x - 1}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$ donc la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à C_f .

Exercice n°22

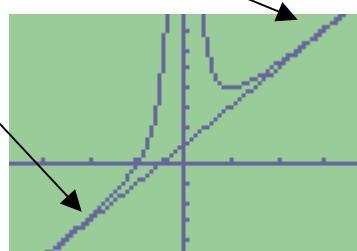
Puisque $\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 1 = 1$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$, on conclut, par somme, que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0 \\ ou x < 0}} f(x) = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à C_f . Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Puisque

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

De plus, pour tout $x \neq 0$, $f(x) - (2x + 1) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2} - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$. Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

De la même manière $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. On en conclut que la droite D d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Pour connaître la position relative de D et C_f , on étudie le signe de $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2}$. Pour tout $x \neq 0$, $f(x) - (2x + 1) = \frac{1}{x^2} > 0$, donc pour tout $x \neq 0$, $f(x) > 2x + 1$. Ceci signifie que sur tout son ensemble de définition, C_f est au dessus de D .



Exercice n°23

1) f est définie si et seulement si $x + 2 \neq 0$ donc $D =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$. Pour tout $x \in D$,

$$ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)}{x+2} + \frac{c}{x+2} = \frac{ax^2 + 2ax + bx + 2b + c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2}$$

Donc $ax + b + \frac{c}{x+2} = f(x)$ si et seulement si $\frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b + c}{x+2} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x+2}$ donc si et seulement si

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

2) A partir de l'écriture $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2}$, on déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = -\infty$, et $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty$.

Mais surtout, puisque, pour tout $x \neq -2$, $f(x) - (2x - 1) = 2x - 1 + \frac{1}{x+2} - (2x - 1) = \frac{1}{x+2}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$, donc la droite D d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, pour tout $x > -2$, $f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x+2} > 0$, donc C_f est au dessus de D sur $]-2; +\infty[$, et pour tout $x < -2$, $f(x) - (2x - 1) = \frac{1}{x+2} < 0$, donc C_f est en dessous de D sur $]-\infty, -2[$.

Exercice n°24

On calcule, pour tout réel x , $f(x) - x = \frac{x^3}{x^2 + 1} - x = \frac{x^3}{x^2 + 1} - x \cdot \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1}$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$ donc la droite D d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$. Puisque, pour tout $x > 0$, $\frac{-x}{x^2 + 1} < 0$, et pour tout $x < 0$, $\frac{-x}{x^2 + 1} > 0$, on en conclut que C_f est au dessus de D sur $]-\infty, 0[$ et en dessous de D sur $]0; +\infty[$.

Exercice n°25 On calcule, pour tout réel $x > 1$,

$$f(x) - 2x = x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x = \sqrt{x^2 - 1} - x = \left(\sqrt{x^2 - 1} - x \right) \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{(\sqrt{x^2 - 1} + x)} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0$, on conclut que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$.

Exercice n°26

1) f est définie si et seulement si $x + 3 \neq 0$ donc $D =]-\infty, -3[\cup]-3; +\infty[$.

$$2) \text{Pour tout } x \in D, ax^2 + b + \frac{c}{x+3} = \frac{(ax^2 + b)(x+3)}{x+3} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax^3 + 3ax^2 + bx + 3b + c}{x+3}$$

Donc $ax^2 + b + \frac{c}{x+3} = f(x)$ si et seulement si $\frac{ax^3 + 3ax^2 + bx + 3b + c}{x+3} = \frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 20}{x+3}$ donc si et seulement si

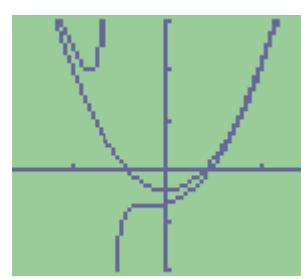
$$\begin{cases} a=1 \\ 3a=3 \\ b=-4 \\ 3b+c=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=-8 \end{cases} \text{ Ainsi, pour tout } x \in D, f(x) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3}$$

3) A partir de l'écriture $f(x) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3}$, on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$ (par soustraction car $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{8}{x+3} = +\infty$) et $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x < -3}} f(x) = +\infty$

4) Pour tout $x \in D$, $f(x) - (x^2 - 4) = x^2 - 4 - \frac{8}{x+3} - (x^2 - 4) = -\frac{8}{x+3}$. Comme $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{8}{x+3} = 0$, on déduit l'existence d'une **PARABOLE ASYMPTOTE** à C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.

De plus, si $x > -3$, $-\frac{8}{x+3} < 0$, et pour tout $x < -3$, $-\frac{8}{x+3} > 0$,

on en conclut que C_f est au dessus de C_g sur $]-\infty, -3[$ et en dessous de C_g sur $]-3; +\infty[$.



Exercice n°27

La calculatrice fournit, grâce au menu TABLE :

On est donc tenté de conjecturer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

X	Y ₁
0.6	1.3E-7
0.5	9E-11
0.4	1E-14
0.3	1E-19
0.2	0
0.1	0
0.01	0

$$\text{Or, pour tout } x \neq 0, f(x) = \frac{(50+x^{20})^2 - 2500}{x^{20}} = \frac{2500 + 100x^{20} + x^{40} - 2500}{x^{20}} = \frac{100x^{20} + x^{40}}{x^{20}} = 100 + x^{20}$$

Ce qui permet de conclure que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 100$!

Exercice n°28

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)\ln x = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ donc par soustraction, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3\ln x) = -\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} x-4 = -4$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow 0} (x-4 + \ln x) = -\infty$

5) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$, on pose $u = x^2$, et puisque $\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$ on conclut que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2) = +\infty$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$ on conclut par quotient que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

7) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ». On transforme

l'écriture : $x - \ln x = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (limite connue), on déduit successivement que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1$,

puis par produit, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$, c'est-à-dire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x = +\infty$

8) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty \cdot 0$ ». En

posant $X = \frac{1}{x}$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} X = 0^+$, la limite cherchée devient $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \ln(1+X)$. Or un résultat du cours nous indique

que $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 1$

9) En posant $X = 2x$, la limite cherchée devient $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+X)}{X}$. Et puisque $\lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$, on conclut que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln(1+X)}{X} = 2$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$

Exercice n°29

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + e^x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4e^x = 0$ (car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$), donc par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 4e^x) = +\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^x = +\infty$, donc par soustraction, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - 3e^x \right) = -\infty$

Exercice n°30

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ($\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ où on a posé $u = -x$), on déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$ donc la droite d'équation $y = -4$ est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$. De plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, donc la droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

3) Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, alors par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2 = 0$, alors par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (limite du cours) et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 2 = -\infty$, alors par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. Mais comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$, on en déduit que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à C_f en $-\infty$.

4) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, donc la droite d'équation $y = -1$ est asymptote horizontale à C_f en $-\infty$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on déduit, par différence et quotient, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

Enfin, puisque $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} e^x - 1 = 0^-$ (car $x < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$), on déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty$. Et puisque

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^x - 1 = 0^+$ (car $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$), on déduit que $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$. La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à C_f .

Exercice n°31

1) Puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, on déduit, par somme et quotient, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{1} = 0$,

2) On transforme l'expression : Pour tout réel x , $\frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ ($\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ où on a posé $u = -x$), on déduit, par somme et quotient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3) La courbe admet donc deux asymptotes horizontales :

La droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$

