TD ***LIMITE D'UNE FONCTION***

EXERCICES D'PPLICATIONS ET DE REFLEXIONS AVEC SOLUTIONS

PROF : ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

Exercice : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Solution : Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \alpha > 0)\ (\forall x \in Df)\ (0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$?

Soit : $x \in \left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$ donc $|f(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| \le 2|x|$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche $\alpha > 0$ tel que :

$0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir $|f(x)| < \varepsilon$ il suffit d'avoir $2|x| \prec \varepsilon$ et

$|x| \prec \frac{1}{2}$ cad $|x| \prec \frac{\varepsilon}{2}$ et $|x| \prec \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre α le plus petit des nombres : $\frac{\varepsilon}{2}$ et $\frac{1}{2}$

donc : $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice2 :1)monter que : $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a)monter que : $\forall x \in \left]-1;1\right[$: $\left|x^2+5x\right| \le 6|x|$

b)Calculer $\lim_{x\to 0} x^2 + 5x$

Solution : 1) on a $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le 1$

donc $\left|x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Donc : $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a) on a : $\left|x^2+5x\right| = \left|x(x+5)\right| = |x||x+5|$

Et puisque : $x \in \left]-1;1\right[$ alors : $4 \prec x+5 \prec 6$

alors : $|x+5| \prec 6$ donc $\left|x^2+5x\right| \le 6|x|$

b) puisque : $\lim_{x\to 0} 6|x| = 0$ alors : $\lim_{x\to 0} x^2 + 5x$

Exercice3 :monter que: $\lim_{x\to 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

Solution : $x \in \mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1$ donc :

$\left|f(x) - 2\right| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x^2$ et on a $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Alors : $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$

Exercice4 :monter que: $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1} = 3$

Solution : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

$\left|f(x)-3\right| = \left|\sqrt{2x+1}-3\right| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$

et on a $\sqrt{2x+1}+3 \ge 3$ donc : $\left|f(x)-3\right| \le \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque : $\lim_{x\to 4} |x-4| = 0$ Alors : $\lim_{x\to 4} f(x) = 3$

Exercice5 :étudier la limite de la fonction :

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

Solution :

On remarque que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$:

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{1+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}$ D'autre part :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|f(x)| \le |x|)$ et puisque $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ alors

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Exercice6 : Soit la fonction définit par :

$f(x) = x^2 + 3x + 2$

monter que : $\lim_{x\to -1} f(x) = 6$

Solution : $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$\left|f(-1+h)-6\right| = \left|h^2-5h\right| = |h||h-5|$

Si $h \in \left]-1;1\right[$ alors : $\left|f(-1+h)-6\right| \le 6|h|$

puisque : $\lim_{h\to 0} 6|h| = 0$ alors : $\lim_{h\to 0} f(-1+h) - 6 = 0$

donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=6$

Exercice7 : Soit la fonction définit par :

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

monter que : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{3}$

Solution : $f(-1+h)-6=h^2-5h$

$$f(2+h)-\frac{1}{3}=\frac{2h}{3+h}$$

Si $h\in\left]-1;1\right[$ alors : $\left|f(2+h)-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{2h}{3+h}\right|\leq |h|$

puisque : $\lim\limits_{h\to 0}|h|=0$ alors : $\lim\limits_{h\to 0} f(2+h)-\frac{1}{3}=0$

donc : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\frac{1}{3}$

Exercice8 : Soit la fonction $\begin{array}{l} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto x-E(x)\end{array}$

Où E désigne la partie entière.

1- Ecrire les expressions de f sans utiliser la partie entière sur les intervalles]0,1[et]1,2[.

2- Construire la courbe de la restriction de f sur [0,2].

3- La fonction f admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction $g(x)=x$ et $h(x)=x-1$

a) Remarquer que f et g sont confondues sur]0,1[et que f et h sont confondues sur]1,2[

b) déterminer les limites de g et de h en 1.

Exercice9 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)$

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $x\succ 1$: $f(x)=\frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=\frac{x}{x+1}$

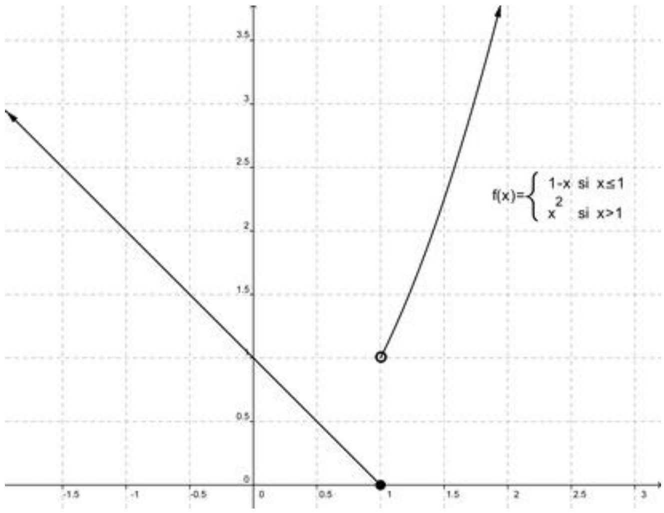
Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$

Si : $x\prec 1$: $f(x)=\frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)}=-\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}}-\frac{x}{x+1}=-\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\succ 1}} f(x)\neq\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\prec 1}} f(x)$

Exercice10 :



La courbe ci-contre est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 1-x\ si\ x\leq 1$

$x\mapsto x^2\ si\ x\succ 2$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction f à droite et à gauche de 1.

Exercice11 : Soit la fonction g définie par :

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$x\mapsto 2x^2-x+3\ si\ x\geq 1$

$x\mapsto -x^2+x+\alpha\ si\ x<1$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

Exercice12 : Soit la fonction $f:x\mapsto\frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0=-1$

Solution :Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Si : $-1\prec x\prec 1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=-\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}}-\frac{x+1}{x-1}=0$

Si : $x\prec -1$: $f(x)=\frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|}=\frac{x+1}{x-1}$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}}\frac{x+1}{x-1}=0$

donc : $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\succ -1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x\prec -1}} f(x)=0$ donc : $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=0$

Exercice13 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $x^2+2 \geq x^2$ donc

$|f(x)| \leq \frac{3}{x^2}$ et on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = 0$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Exercice14 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$0 \leq 1+\sin x \leq 2$ donc $\left|\frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et on a $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ donc :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Exercice15 : Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2+x^4)\sin\frac{1}{x}$ déterminer : $\lim_{x\to0} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ et $x^2+x^4 \geq 0$

donc $-x^2-x^4 \leq (x^2+x^4)\sin\frac{1}{x} \leq x^2+x^4$ et puisque :

$\lim_{x\to0} x^2+x^4 = \lim_{x\to0} -x^2-x^4 = 0$ alors : $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

Exercice16 : Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2+5x+1$

déterminer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq 3x^2+5x+1$ et et

puisque : $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice17 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x+\sin x-1$

déterminer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$x-2 \leq f(x) \leq x$ et puisque :

$\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Exercice18 : Soit $f(x) = \frac{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$ $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire $\lim_{x\to0} f(x)$

Exercice19 : déterminer : $\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x}$

Solution :

on a $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : "$+\infty-\infty$"

$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

puisque : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x} = +\infty$

Exercice20 : déterminer : $\lim_{x\to0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x\to0} x^2+x+2 = 2$ et $\lim_{x\to0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc : $\lim_{x\to0} x^2+x+2+\frac{1}{x^2} = +\infty$

Exercice21 : déterminer :

1) $\lim_{x\to1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$ 2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2}$

3) $\lim_{x\to\pm\infty} 2x^3+x^2-x+4$

Solution : 1)on a : $\lim_{x\to1} (x-1)^2 = 0^+$ et $\lim_{x\to1} x^3+1 = 2$

Donc : $\lim_{x\to1} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$

2)on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} x\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}$

et on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x^3} = 1$

et $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = 1$ Donc : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$ car $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x^2-x+4 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3+x^2-x+4=\lim\limits_{x\to-\infty}2x^3\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{2}{x^3}\right)$

on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^3+x^2-x+4=-\infty$

Exercice22 :calculer $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}$

Solution :on a : $\lim\limits_{x\to1^+}3x+1=4$

on a : $\lim\limits_{x\to1^+}x^2+x-2=0^+$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{3x+1}{x^2+x-2}=+\infty$

Exercice23 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+5x^2-7x^4$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}$ 4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4}$

5) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

Solution : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}2x+5x^2-7x^4=\lim\limits_{x\to+\infty}-7x^4=-\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-7x^4}{14x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x}{2}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2x^5}{2x^6}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{1}{x}=0$

Exercice24 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ 2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution : 1)

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}=1\times1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}$ directement on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}}\right)=\lim\limits_{h\to0^+}-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}}\right)=-\frac{1}{2}\times1=-\frac{1}{2}$

(On pose $\sqrt{x}=h$)

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$

On montre que : $\sqrt{3}\sin x-\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$

On pose $x-\frac{\pi}{6}=h$) donc $x\to\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow h\to0$

Donc : $=2\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=2\times1=2$

Exercice25 : Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

Solution : 1)on pose : $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|\le1$ donc : $|f(x)|\le x^2$ et on a

$\lim\limits_{x\to0}x^2=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^3}$? on pose : $f(x)=\frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $|\cos x|\le1$ donc : $|f(x)|\le\frac{1}{|x|^3}$ et on a

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|x|^3}=0$ Alors : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$? on pose : $f(x)=\frac{1+\sin x}{x^2(2+\cos x)}$

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $-1\le\cos x\le1$ et $-1\le\sin x\le1$ donc :

$0\le\frac{1+\sin x}{2+\cos x}\le2$ donc $0\le f(x)\le\frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty}0=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$ Alors :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$? on pose : $f(x)=1+\frac{x}{2+\sqrt{x^4+1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2+\sqrt{x^4+1} \geq \sqrt{x^4}$ cad $2+\sqrt{x^4+1} \geq x^2$

donc : $\frac{1}{2+\sqrt{x^4+1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $\left|f(x)-1\right| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|}=0$ Alors : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$

Exercice26 : Soient les fonctions tels que :

$f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$ et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ et $h(x)=\frac{x^2+1}{x^3}\sin x$

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2)Déterminer : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to 3} g(x)$

3)Déterminer : $\lim_{x\to 0} h(x)$

4)Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

1)Déterminer : $\lim_{x\to 2} f(x)$ et $f(x)=\sqrt{2x+1}\left(-3x^2+x\right)$

$\lim_{x\to 2} 2x+1=5$ et $\lim_{x\to 2} -3x^2+x=-10$

Donc : $\lim_{x\to 2} f(x)=\sqrt{5}\times(-10)=-10\sqrt{5}$

$\lim_{x\to+\infty} 2x+1=\lim_{x\to+\infty} 2x=+\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a : $\lim_{x\to+\infty} -3x^2+x=\lim_{x\to+\infty} -3x^2=-\infty$

Donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to+\infty} g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

On a : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}+1=+\infty$

Et $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x^2}=-2$ donc : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

- 2) $\lim_{x\to 3} g(x)$? et $g(x)=\frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)$

$\lim_{x\to 3} \sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$ et $\lim_{x\to 3} -2x^2+1=-17$ et $\lim_{x\to 3} (x-3)^2=0^+$

donc : $\lim_{x\to 3} g(x)=-\infty$

3) $\lim_{x\to 0} h(x)$?.

$\lim_{x\to 0} h(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2}\frac{\sin x}{x}$

Or $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}=1$ et puisque : $\lim_{x\to 0} x^2+1=1$ et $\lim_{x\to 0} x^2=0^+$

et $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$ alors : $\lim_{x\to 0} h(x)=+\infty$

4) $k(x)=\frac{-3x+1}{x(x-2)}$ donc : $D_k=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

- $\lim_{x\to+\infty} k(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty} \frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to-\infty} k(x)=\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{x}=0$
- $\lim_{x\to 0} -3x+1=1$ et $\lim_{x\to 0} x^2-2x=0$

Etude du signe de : x^2-2x

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\lim_{x\to 0^+} x^2-2x=0^-$ et $\lim_{x\to 0^-} x^2-2x=0^+$

Donc : $\lim_{x\to 0^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} k(x)=+\infty$

$\lim_{x\to 2} -3x+1=-5$ et $\lim_{x\to 2^+} x^2-2x=0^+$ et $\lim_{x\to 2^-} x^2-2x=0^-$

Donc : $\lim_{x\to 2^+} k(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 2^-} k(x)=+\infty$

Exercice27 : calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}$ 2) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$

3) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x}-x$ 4) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solution : 1) $\lim_{x\to 2} \sqrt{2x}-2=0$ et $\lim_{x\to 2} x^2+3x-10=0$

on trouve une formes indéterminée : "$\frac{0}{0}$"

$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(x^2+3x-10\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$

$=\lim_{x\to 2} \frac{(2x-4)}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2} \frac{2}{\left(\sqrt{2x}+2\right)}\times\frac{1}{(x+5)}=\frac{2}{14}$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$?

On a : $x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$

Et $2x^3+3x^2-4x-1=(x-1)(2x^2+5x+1)$

Donc :

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1}=\frac{8}{3}$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$?

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+x=+\infty$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}=+\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$

on trouve une formes indéterminée : $"+\infty-\infty"$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$ or $x\to+\infty$ donc $|x|=x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)}+1}=\frac{1}{2}$$

4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}$

On pose $x-\frac{\pi}{4}=h$ donc $x\to\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow h\to0$ (

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

or : $\tan\left(h+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan h+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan h\times\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan h+1}{1-\tan h}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{h\to0}\frac{2}{1-\tan h}\times\frac{\tan h}{h}=\frac{2}{1}\times1=2$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien