

1) Règles de calcul : ($a \in \mathbb{R}$)

Somme	Produit	Rapport
$+\infty + \infty = +\infty$	($a > 0$) ; $a \times (+\infty) = +\infty$	$\frac{1}{0^+} = +\infty$; $\frac{1}{+\infty} = 0^+$
$-\infty - \infty = -\infty$	($a < 0$) ; $a \times (+\infty) = -\infty$	
$a + \infty = +\infty$	($a > 0$) ; $a \times (-\infty) = -\infty$	$\frac{1}{0^-} = -\infty$; $\frac{1}{-\infty} = 0^-$
$a - \infty = -\infty$	($a < 0$) ; $a \times (-\infty) = +\infty$	
$+\infty - \infty$ et $-\infty + \infty$ FI	$(\pm\infty)(\pm\infty) = \pm\infty$ et $0 \cdot (\pm\infty)$ FI	$\frac{0}{0} = \text{FI}$ et $\frac{\infty}{\infty} = \text{FI}$

Limites remarquables pour la fonction circulaire

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
---	---	---

2) Méthodes de calcul des limites quand x tend vers un nombre x_0 : ($a \in \mathbb{R}$)

a) Cas des fonctions ; polynômes ou rationnelles ou irrationnelles :

Considérons la fonction f telle que $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 6x + 8}$

En général, on remplace la variable x par x_0 . Trois cas se présentent :

Premier cas : on trouve un nombre « habituel » L , alors dans ce cas la limite c'est ce nombre L . On écrit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

- Calculons $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$? : en remplaçons x par 1, on trouve $\frac{-4}{3}$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{4}{3}$.
- Calculons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$? : en remplaçons x par 0, on trouve $\frac{-6}{4}$, d'où : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{3}{2}$.
- Calculons $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$? : en remplaçons x par -3, on trouve $\frac{0}{45}$, d'où : $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$.

Deuxième cas : on trouve $\frac{0}{0}$, c'est une forme indéterminée.

- Calculons $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$? : en remplaçons x par 2, on trouve $\frac{0}{0}$.

Là on rappelle qu'un polynôme $P(x)$ est divisible par $x-a$ si et seulement si $P(a)=0$. On en déduit que les deux polynômes $x^2 + x - 6$ et $x^2 - 6x + 8$ sont tous deux divisibles par $x-2$, d'où :

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}, \text{ en remplaçant une deuxième fois } x \text{ par 2, on trouve } \frac{5}{-2}, \text{ d'où : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{5}{2}.$$

Troisième cas : on trouve $\frac{a}{0}$ avec $a \neq 0$, d'après les règles de calcul la limite est $-\infty$ ou $+\infty$.

- Calculons $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$? : en remplaçons x par 4, on trouve $\frac{14}{0}$. On

$$x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$$

$$\text{D'où : } f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{(x-2)(x-4)} = \frac{x^2 + x - 6}{x-2} \times \frac{1}{x-4}.$$

D'après le tableau de signes de $x-4$, on a : $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{x-4} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

x	-∞	4	+∞
x-4	+	0	-

D'autre part on a : $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \frac{14}{2} = 7$, d'où enfin : $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$.

b) Cas des fonctions circulaires :

En général, on remplace la variable x par x_0 . Dans le cas d'une forme indéterminée, on utilise les limites remarquables citées dans le tableau en haut.

3) Méthodes de calcul des limites quand x tend vers l'infini :

a) Théorème : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$ est une fonction polynôme.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

Démonstration : on a écrit pour tout x non nul

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots + a_2 \frac{1}{x^{n-2}} + a_1 \frac{1}{x^{n-1}} + a_0 \frac{1}{x^n} \right)$$

Or $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, d'après le tableau en haut, ce qui fait

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n$$

b) Théorème : Application aux fonctions polynômes

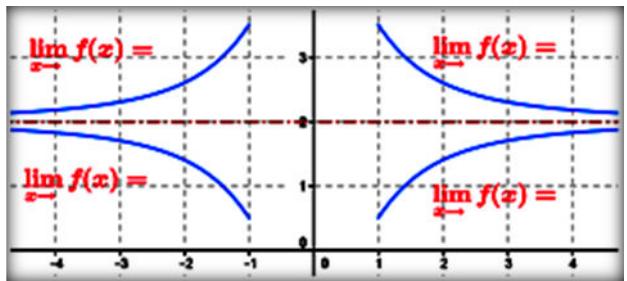
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^3 + 3x^2 - 4x - 7) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -5x^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^5 - 4x^4 - 2x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^5 = -\infty$

c) Théorème : Application aux fonctions rationnelles

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^7 + 3x^5 - 4x - 7}{2x^3 + 5x^2 - 3x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^7}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2} x^4 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 3x - 1}{3x^5 + 2x^3 - 8x - 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{3} \times \frac{1}{x^3} = \frac{5}{3} \times 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4 - 5x^4 - 3}{3x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 11} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^4}{3x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$

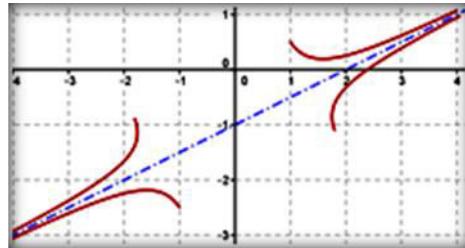
Bonne Chance

Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$



Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

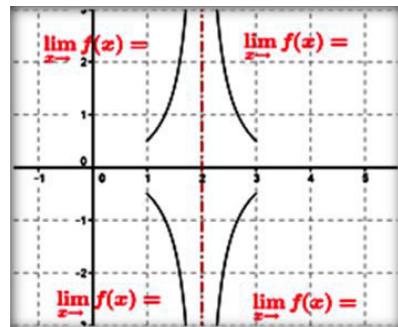
La droite (Δ) : $y = ax + b$ est une Asymptôte oblique à (C_f)
signifie que : $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$



La droite (Δ) d'équation $y = b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞

(C_f) est au dessus de (Δ) $\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) > 0$
 (C_f) est en dessous de (Δ) $\Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) < 0$

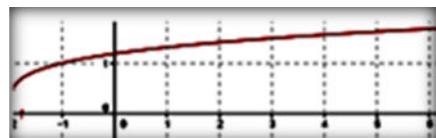
Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$



La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

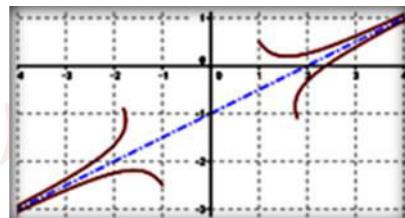
Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$



La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)

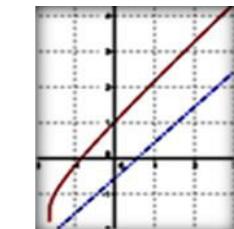
Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$$



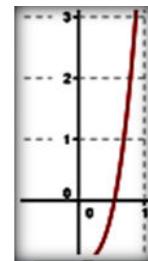
La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty$$



La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$

Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$



La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)