

## ***LIMITE D'UNE FONCTION***

### **I) RAPPELLES ET COMPLEMENTS.**

$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

1) Le centre de l'intervalle  $a, b[$  est le réel

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

2) Le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  est le réel positif

$$r = \frac{b-a}{2}$$

**Activité :** Déterminer les bornes d'un intervalle ouvert de centre  $x_0$  et de rayon  $r$

(deux réels données)

**Définition :** L'ensemble :

$]a; b[^* = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\} - \{x_0\}$  où  $x_0$  est le centre de l'intervalle  $]a, b[$  :

S'appelle l'intervalle Pointé de bornes  $a$  et  $b$ .

**Remarque :** Si  $r$  est le rayon de l'intervalle  $]a, b[$  et

$x_0$  son centre alors :  $]a; b[^* = ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\}$

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

**Activité1 :** Montrer que

$$x \in ]x_0 - r; x_0 + r[ - \{x_0\} \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

**Activité2 :**

1-Rappeler l'image d'un ensemble par une application.

2- Rappeler  $f(A) \subset B$

3- Traduire en utilisant les valeurs absolues :

$$f(\{x_0 - r; x_0 + r\} - \{x_0\}) \subset ]l - \beta; l + \beta[$$

### **II) LIMITE NULLE EN 0.**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité3 :** Considérons la fonction :  $x \mapsto \frac{x^3}{|x|}$

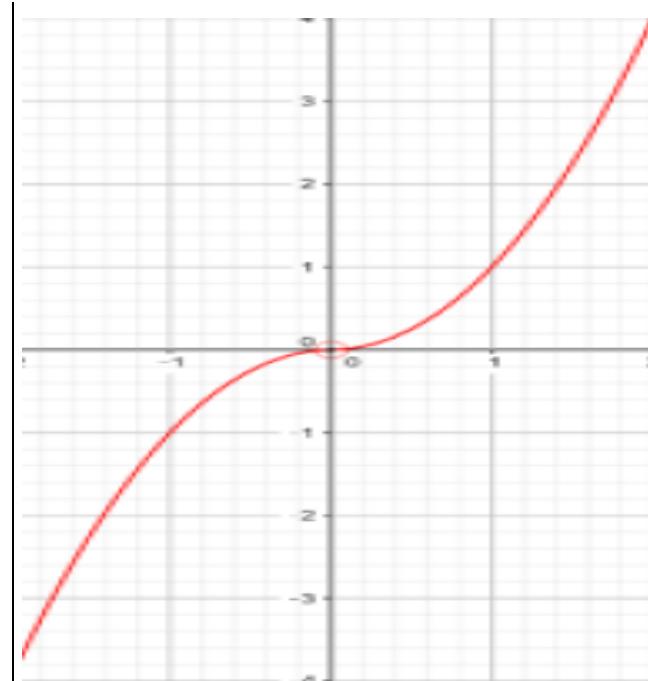
1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2- Ecrire des expressions de  $f$  sur des intervalles sans valeur absolue.

3- La courbe de  $f$  est ci-contre :

a)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(\{]-\alpha; \alpha\} - \{0\}) \subset ]-2; 2[$$



b)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(\{]-\alpha; \alpha\} - \{0\}) \subset ]-10^2; 10^2[$$

c)- Déterminer un réel  $\alpha$  tel que :

$$f(\{]-\alpha; \alpha\} - \{0\}) \subset ]-\varepsilon; \varepsilon[$$

En répondant à la question 3-c) on peut Conclure que :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$$

On dit que la fonction  $f$  admet 0 comme limite en 0. et on écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre 0. On dit que  $f$  admet la limite 0 en 0 si elle vérifie la propriété suivante  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$ .

$$\text{On écrit : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Remarques :** 1) Le fait que  $f$  est définie sur un intervalle pointé est essentielle.  $g(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$  est définie en 0 et n'admet pas de limite en 0.  $Dg = \{0\}$ .

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre 0 et si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

**Propriété :** Les fonctions :  $x \mapsto x^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) ;  $x \mapsto \sqrt{|x|}$  ;  $x \mapsto kx$

Tendent vers 0 quand  $x$  rend vers 0.

**Exercice :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{x}{x+1}$

Montrer en utilisant la définition que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

**Solution :** Montrons que :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$  ?

Soit :  $x \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$  donc  $|f(x)| = \left|\frac{x}{x+1}\right| \leq 2|x|$

Soit  $\varepsilon > 0$  on cherche  $\alpha > 0$  tel que :

$0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

Pour avoir  $|f(x)| < \varepsilon$  il suffit d'avoir  $2|x| < \varepsilon$  et

$|x| < \frac{1}{2}$  cad  $|x| < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $|x| < \frac{1}{2}$

Il suffit de prendre  $\alpha$  le plus petit des

nombres :  $\frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{1}{2}$

donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

### III) LIMITES FINIES EN $a$ .

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$

quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$ . c.-à-d. :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

**Propriété :** Si  $P$  est une fonction polynôme alors

$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Une fonction polynôme  $P$  c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1 = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 17$

**Propriété:** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Exemple1 :** 1) montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a) montrer que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Solution :** 1)  $x \in \mathbb{R}^* \quad \left|\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \leq 1$

donc  $|x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right)| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2)a) on a :  $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque :  $x \in ]-1; 1[$  alors :  $4 < x+5 < 6$

alors :  $|x+5| < 6$  donc  $|x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Exemple2 :** montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Solution :**  $x \in \mathbb{R}^* \quad \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1$  donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

**Exemple3 :** montrer que :  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Solution :**  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x) - 3| = |\sqrt{2x+1} - 3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1} + 3}$$

et on a  $\sqrt{2x+1} + 3 \geq 3$  donc :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

**Exemple :** On se propose d'étudier la limite de la fonction :  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$  en 0.

On remarque que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \quad \text{D'autre part :}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (|f(x)| \leq |x|)$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si : la fonction  $h \rightarrow f(a+h)-l$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0

**Exemple1 :**  $f(x) = x^2 + 3x + 2$

$$\text{monter que : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$$

**Solution :**  $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$$|f(-1+h) - 6| = |h^2 - 5h| = |h||h-5|$$

**Si**  $h \in ]-1; 1[$  alors :  $|f(-1+h) - 6| \leq 6|h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} 6|h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(-1+h) - 6 = 0$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 6$$

**Exemple2 :**  $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$

$$\text{monter que : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$$

**Solution :**  $f(-1+h) - 6 = h^2 - 5h$

$$f(2+h) - \frac{1}{3} = \frac{2h}{3+h}$$

**Si**  $h \in ]-1; 1[$  alors :  $\left| f(2+h) - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{2h}{3+h} \right| \leq |h|$

puisque :  $\lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$  alors :  $\lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) - \frac{1}{3} = 0$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{3}$$

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

**Remarque :**

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

**Propriété :** Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  alors cette limite est **unique**.

## IV) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

### 1) Définition

**Activité :** Soit la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x \mapsto x - E(x)$

Où  $E$  désigne la partie entière.

- 1- Ecrire les expressions de  $f$  sans utiliser la partie entière sur les intervalles  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .
- 2- Construire la courbe de la restriction de  $f$  sur  $[0, 2]$ .

3- La fonction  $f$  admet-elle une limite en 1.

4- Soit la fonction  $g(x) = x$  et  $h(x) = x - 1$

- a) Remarquer que  $f$  et  $g$  sont confondues sur  $]0, 1[$  et que  $f$  et  $h$  sont confondues sur  $]1, 2[$
- b) déterminer les limites de  $g$  et de  $h$  en 1.

**Définition1 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a+r[$  où  $r > 0$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  à droite si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Et on écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$

**Définition2 :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a[$  où  $r > 0$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  à gauche si la proposition suivante est vraie :

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Et on écrit :  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

**Exemple :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si : } x > 1 : f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

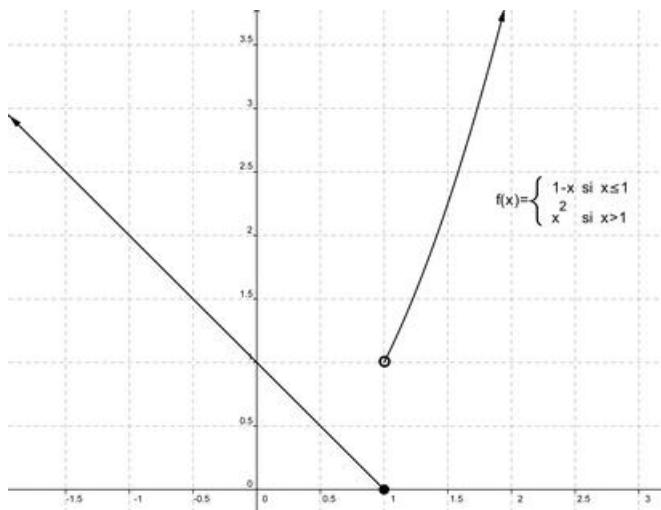
Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si :  $x < 1 : f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

### Exercice1 :



La courbe ci-dessus est la courbe de la fonction définie par Morceaux comme suite :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 1 - x \text{ si } x \leq 1$$

$$x \mapsto x^2 \text{ si } x > 1$$

Déterminer graphiquement les limites de la fonction  $f$  à droite et à gauche de 1.

**Exercice2 :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admet une limite en 1.

**Théorème :** Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  si et seulement si elle admet une limite à droite de  $a$  égale à sa limite à gauche de  $a$  égale à  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Exemple :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$

**Solution :**

Déterminons  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$  ?

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si : } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si : } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

### 2) Propriétés

Toutes les propriétés mentionnées au paravent sont vraies à droite et à gauche de  $a$  en tenant compte des conditions

**Propriété :** Si sur un intervalle de la forme  $[a, a+r]$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} u(x) = 0$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$$

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle de la forme  $[a, a+r]$  et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l$

$$\text{alors } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = l$$

### 3) Opérations sur les limites finies.

**Propriété :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = l + l' \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l' \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l} \text{ si } l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$$

### V) EXTENSION DE LA NOTION DE Limite.

## 1) Limite infinie à droite (à gauche) de $a$ .

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité :** Soit la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$

1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^{-2}$	$10^{-6}$	$10^{-20}$	...	$10^{-p}$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10100$  déterminer un réel  $\alpha$  tel que si  $0 < x < \alpha$

Alors  $f(x) > 10100$ .

Montrer que :

$$(P) : (\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

La propriété (P) veut dire qu'on peut rendre  $f(x)$  aussi grand qu'on

veut ; on dit que la limite de  $f$  est  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0 à droite et

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a+r[$  où  $r > 0$ , on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $a$  adroite si :

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions :  $x \mapsto k|x|$ ;  $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$  Tendent vers 0 quand  $x$  rend vers 0.

**Propriétés :**

l'inverse des fonctions  $x \mapsto k|x|$ ;  $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;

$x \mapsto k|x|^n$  où  $k$  un réel strictement positif et  $n \in \mathbb{N}^*$ , tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers 0.

**Définitions :** 1)  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$  :

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

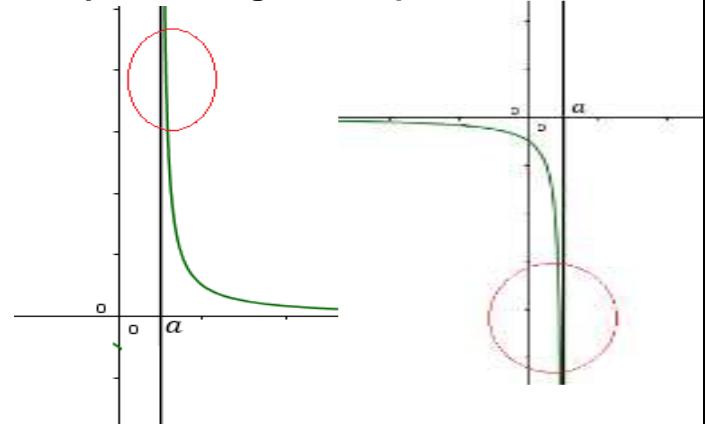
2)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$  :

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) > A)$$

3)  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$  :

$$(\forall A > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in Df)(0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) < -A)$$

## Interprétations géométriques :



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

**Exercice :** Compléter l'interprétation géométrique.

**Définition :** Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty \text{ ou }$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ Alors }$$

On dit que la droite ( $\Delta$ ):  $x = a$  est une Asymptote verticale.

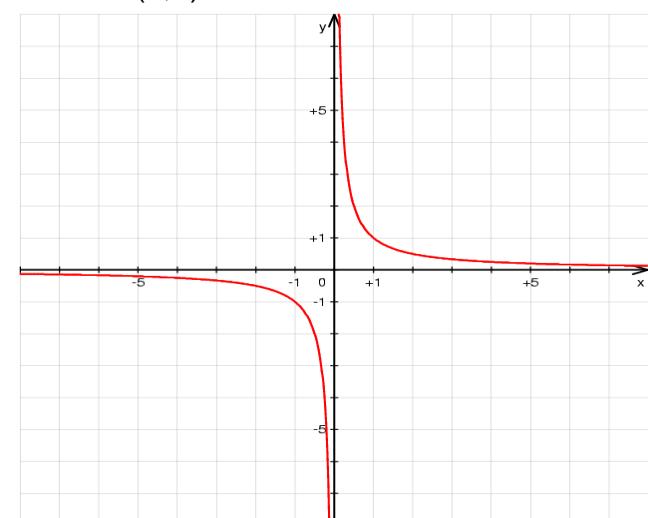
## 2) Limites finies en $\pm\infty$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Activité :** Soit la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

La courbe représentative de  $f$  est l'hyperbole de centre  $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $\varepsilon = 10^{-100}$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors  $|f(x)| < \varepsilon$ .

En général, montrer que :

(P) :  $(\forall \varepsilon > 0) (\exists B > 0) (\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon)$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a, +\infty[$

( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

**Propriétés :** les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{|x|}$ ;  $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$ ;

$x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$  où  $k$  un réel donné et  $n \in \mathbb{N}^*$

Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Définitions :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]-\infty, a[$  ( $a$  un réel quelconque) et  $l$  un réel, on dit que la fonction  $f$  tend  $l$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$  si :

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

On écrit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

**Propriété :**

- Soit  $f$  et  $u$  deux fonctions définies sur un intervalle de la forme :  $I = ]a, +\infty[$

Si  $\forall x \in I : |f(x)| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

• Soit  $f$  et  $u$  deux fonctions définies sur un intervalle de la forme :  $I = ]-\infty, a[$

Si  $\forall x \in I : |f(x)| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$

alors  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**Exemple1 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{-3}{x^2+2}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $x^2 + 2 \geq x^2$  donc

$|f(x)| \leq \frac{3}{x^2}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$  donc :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

**Exemple2 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

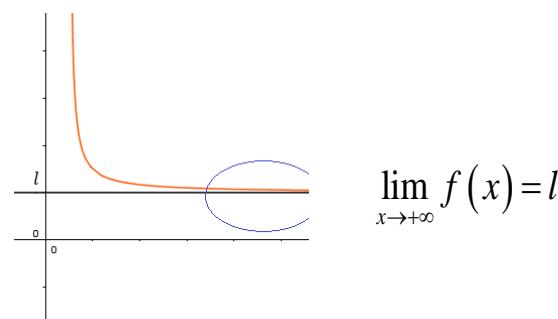
**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$  on a  $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$  et

$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$  donc  $\left| \frac{1+\sin x}{1+\sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

**Interprétation géométrique :**



Compléter les autres interprétations.

**Définition :** Si la fonction  $f$  vérifie l'une des limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  ou  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

Alors, on dit que la droite  $(\Delta) : y = l$  est une asymptote horizontale.

**Remarque :** La position de la courbe  $C_f$  par rapport à son asymptote horizontale se détermine par le signe de  $f(x) - l$  :

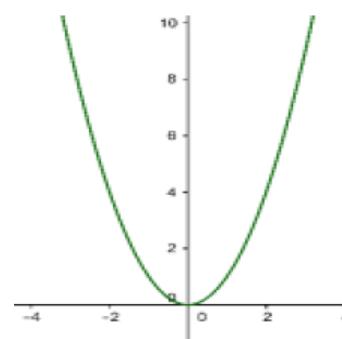
1) Si  $f(x) - l \geq 0$  alors  $C_f$  est au-dessus de  $(\Delta) : y = l$

2) Si  $f(x) - l \leq 0$  alors  $C_f$  est au-dessous de  $(\Delta) : y = l$

3) **Limite infinies en  $\pm\infty$**

**Activité :** Considérons la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $x \mapsto x^2$

La courbe représentative de  $f$  est la parabole de centre  $O(0,0)$



**1- Compléter le tableau suivant :**

$x$	$10^2$	$10^6$	$10^{20}$	...	$10^p$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

Considérons  $A = 10100$  déterminer un réel  $B$  tel que si  $x > B$  alors  $f(x) > A$ .

En général, montrer que :

$$(P) : (\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction  $[a, +\infty[$  (où  $a$  est un réel quelconque) on dit que la fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  si :

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions :

$$x \mapsto x^2; x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*); x \mapsto \sqrt{x}; x \mapsto |x|$$

tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

**Définitions :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  si

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) > A)$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  si

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x > B \Rightarrow f(x) < -A)$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  si

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) > A)$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  si

$$(\forall A > 0)(\exists B > 0)(\forall x \in Df)(x < -B \Rightarrow f(x) < -A)$$

**Remarque :** Pour l'interprétation géométrique, il y'a plusieurs cas qu'on va étudier par la suite (Etude de fonction).

## VI) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

### 1) Limites et ordres.

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de  $a$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .)

**Propriété :** Si  $f$  et  $g$  sont confondues sur un intervalle pointé de centre  $a$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

alors  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

**Propriété :** 1) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[-\{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $f$  positif sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$

2) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[-\{a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $g$  admet une limite en  $a$  et  $f \leq g$  sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si  $x$  tend vers  $a$  à droite, ou  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de  $a$ )

**Propriété :** 1) Si sur un intervalle de la forme

$]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :

$u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si  $x$  tend vers  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

**Exemple1 :** Soit la fonction :

$$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \quad \text{déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  et  $x^2 + x^4 \geq 0$

donc  $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$  et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Exemple2:** Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$  et et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exemple3 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$  déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :  $x - 2 \leq f(x) \leq x$  et puisque :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\text{Exercice : Soit } f(x) = \frac{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$$

1- Montrer que ( $\forall x \in \mathbb{R}^*$ )  $f(x) \geq \frac{1}{x^2}$

2- En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

## 2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

### 1) Limite de la somme

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a+$ ;  $a-$ ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Formes indéterminées :** Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

**Exemple1 :** 1)  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x^2$  on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = -7$$

2)  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x$  on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

**Exemple2 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée : "+∞ - ∞"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$$

### 2) Limites des produits

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

### 3) Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

### 4) Limites des quotients

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

**Exemple1 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Solution :** on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$

**Exemple2 :** déterminer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

**Solution :** 1) on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  et

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

2) on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$

et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$  Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+1}{(x-1)^2} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$

on a :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0$  et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$

**Exemple3 :** On veut déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$

on a :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+x-2 = 0^+$

x	-∞	-2	1 ↗	+∞
$x^2+x-2$	+	0	-	0 ↗ +

Donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$

**Remarque :** 1) Eviter d'écrire ces expressions

qui n'ont pas de sens mathématique :  $\frac{?}{0^+}$  et  $\frac{?}{0^-}$

2) Ne pas utiliser  $+\infty$  ou  $-\infty$  dans les opérations dans  $\mathbb{R}$  ( $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des réels)

**Exercices :** Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-x}{2x^3+2x-4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

**3) Limites d'une fonction polynôme en  $\pm\infty$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré  $n$  tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec  $a_n \neq 0$  On a :

$$f(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$$

puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 = 1$

alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

**Propriété :** La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite de son plus grand terme en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemple :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

**4) Limites d'une fonction rationnelle en  $\pm\infty$**

Une fonction rationnelle est le rapport de deux

fonctions polynômes :  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ avec } a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \text{ avec } b_m \neq 0$$

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

$$h(x) = \frac{a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)}{b_mx^m \left( \frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1 \right)}$$

$$h(x) = \frac{\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1}{\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1}$$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1}{\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

**Propriété :** La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemples :**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Exercice :** Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{x^3 + 2x\sqrt{x}}$  vous pouvez poser  $\sqrt{x} = t$

### 5) Limites des fonctions trigonométriques.

**Activité :** Dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

On considère le cercle

Trigonométrique d'origine  $A(1,0)$ .  $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$

et  $B$  le point sur le cercle

trigonométrique tel que :  $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \equiv x[2\pi]$

1-Déterminer en fonction de  $x$  la surface du domaine circulaire  $\mathcal{D}$  limité par

$[OA], [OB]$  et l'arc géométrique  $AB$

2- Soit  $H$  la projection orthogonale de  $B$  sur  $(OA)$ .

a) Déterminer en fonction de  $x$  l'aire du triangle  $OAB$

b) Comparer les aires du domaine  $\mathcal{D}$  et du triangle, que peut-on conclure ?

3- Montrer que :  $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]) (|\sin x| \leq |x|)$ .

4- Déterminer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x$

et  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x$

5- Considérons la droite  $(\Delta)$  la droite tangente au cercle  $(C)$  en  $A$

a) Soit  $T$  l'intersection de  $(\Delta)$  et  $(OB)$ , Déterminer en fonction de  $x$  la surface de  $OAT$ .

b) En déduire que  $(\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[) (x \leq \tan x)$

c) En déduire que  $(\forall x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[) (|x| \leq |\tan x|)$

6- En utilisant les résultats précédents. Montrer

que : a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**Propriété :** Soit  $a$  un réel on a :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

3) si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

**Propriété :** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Exemples :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

**Solution :** 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x}$  directement on trouve une

formes indéterminée :  $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cosh h}{h^2} \right) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

(On pose  $\sqrt{x} = h$ )

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On montre que :  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On pose  $x - \frac{\pi}{6} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\text{Donc : } = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$$

**Exercice :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

**Solution :** 1) on pose :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$   $\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq x^2$  et on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$   $|\cos x| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$  et on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$   $-1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$  donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  Alors :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$  ? on pose :  $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^*$   $2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4}$  cad  $2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$

donc :  $\frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}$  donc :  $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

**Exercice :** Soient les fonctions tels que :

$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$  et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  et  $h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

3) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

**Solution :**

1) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  et  $f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1=5$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x=-10$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1=\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x=+\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1}=+\infty$

Et on a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x=\lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2=-\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=-\infty$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}=+\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1=+\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2}=-2$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)=-\infty$

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  ? et  $g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x}+1=\sqrt{3}+1$  et  $\lim_{x \rightarrow 3} -2x^2+1=-17$  et

$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2=0^+$  donc :  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)=-\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$  ?.

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x)=\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$

Or  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}=1$  et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2+1=1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2=0^+$

et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2}=+\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)=+\infty$

4)  $k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)}$  donc :  $D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} -3x+1=1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x=0$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x(x-2)$	+	0	-	0

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^-$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1=-5$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$

**Exercice :** calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

**Solution :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 10 = 0$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x+5)} = \frac{2}{14} \end{aligned}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} ?$$

On a :  $x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$

Et  $2x^3+3x^2-4x-1 = (x-1)(2x^2+5x+1)$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x ?$$

On a :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty$  donc :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

Et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+x}} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+1}} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

On pose  $x - \frac{\pi}{4} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

