DEVOIR

Exercice 1 $(U_n)_n$ المعرفة une suite réelle telle que : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{6U_n}{1+15U_n}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad U_n > \frac{1}{3}$

2) Etudier la monotonie de $(U_n)_n$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad U_n \leq 1$

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad U_{n+1} - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{6}\left(U_n - \frac{1}{3}\right)$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\quad U_n - \frac{1}{3} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

4) on pose $V_n = 1 - \frac{1}{3U_n}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

b) calculer V_n puis U_n en fonction de n

c) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{U_k}$ déterminer S_n en fonction de n

en déduire que $T_n = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$

Exercice 2 Soit la suite $(U_n)_n$ définie par $U_1 = 5$ et $U_{n+1} = 3U_n + 4^n$. on pose $V_n = 4U_n - U_{n+1}$

1) calculer U_0 , U_2 et V_0

2) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique de raison $q = 3$ et calculer V_n en fonction de n

3) on pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) déterminer T_n en fonction de n

b) montrer que $V_n = U_n - 4^n$ en déduire que $U_n = 4^n + 3^{n-1}$

c) montrer que $T_n - 3S_n = U_0 - U_{n+1}$ puis déterminer S_n en fonction de n

Exercice 3 *On considère la suite* $(U_n)_n$ *telle que* $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ *et* $U_{n+2} = \frac{1}{6}U_{n+1} + \frac{1}{6}U_n$

On pose $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ *et* $W_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$

1) a) *montrer que* $(V_n)_n$ *est géométrique et calculer* V_n *en fonction de* n

b) *montrer que* $(W_n)_n$ *est géométrique et calculer* W_n *en fonction de* n

2) *on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} W_k$ *et* $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) *calculer* S_n *en fonction de* n *et déterminer* U_n *en fonction de* n

c) *prouver que* $T_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{10}\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{6}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n$