Suites numériques

Exercice (1)

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \dfrac{u_{n-1}}{1+2u_{n-1}} & : \forall n \geq 2 \end{cases}$

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1- monter que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme

2- Calculer v_n *puis* u_n en fonction de n.

3- On pose : $w_n = 2^{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

i-déterminer la nature de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$.

ii-Calculer la somme suivante : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$.

Exercice (2)

Soit les suites : $\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 2 \\ u_n = \dfrac{3u_{n-1} \times u_{n-2}}{2u_{n-1} + u_{n-2}} & : \forall n \geq 2 \end{cases}$

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_{n-1}}$.

1- montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ est géométrique en déterminant sa raison q et son premier terme.

2- calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$

en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice (3)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par :

$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_{n+1} = \dfrac{n+3+2na_n}{3n+3} : \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ $\quad b_n = n(1-a_n)$

1- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $a_n < 1$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

2- montrer que $(b_n)_n$ est une suite géométrique

3- calculer a_n en fonction de n .

4- calculer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k$.

Exercice (4)

$(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite arithmétique dont les termes sont toutes non nulles.

1- montrer que :

$$\frac{1}{u_1u_2} + \frac{1}{u_2u_3} + \dots + \frac{1}{u_nu_{n+1}} = \frac{n}{u_1u_{n+1}}$$

2- calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$T_n = \frac{1}{10\times 11} + \frac{1}{11\times 12} + \dots + \frac{1}{99\times 100}$$

Exercice (5)

$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites définies par :

$\begin{cases} u_1 = 1 \quad ; \quad v_1 = 6 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n + v_n}{6} \quad ; \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n < v_n$

2- montrer que $(u_n)_n$ est croissante et que $(v_n)_n$ est décroissante.

3- montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(v_n - u_n).$$

4- déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $v_n - u_n \leq 6\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$

Exercice (6)

Soit la suite : $\begin{cases} u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_{n-1} + \dfrac{2}{u_{n-1}}\right) \\ u_1 = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

1- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $u_n > \sqrt{2}$.

2-a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

b) déduire : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt{2} < \dfrac{1}{2}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

et que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n - \sqrt{2} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exercice (7)

Soient les suites :

$\begin{cases} u_0 = 5 \quad ; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$

1- déterminer la nature de la suite $(v_n)_n$.

2- déterminer de deux manières la somme Suivante :

$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} w_k$ et déduire u_n en fonction de n.