

## Suites numériques

### Exercice 1

Calculer les trois premiers termes des suites suivantes :

$$1) \quad U_n = 2^n - n \quad 2) \quad V_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$3) \quad W_0 = 2 \text{ et } W_{n+1} = \frac{2W_n + 1}{W_n + 2}$$

$$4) \quad T_1 = 3 \text{ et } T_n = \frac{1}{2}T_{n-1} + 2$$

### Exercice 2

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$$

Montrer que  $(U_n)_n$  est majorée par 5

### Exercice 3

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$$

1) montrer que  $(U_n)_n$  est minorée par -1

2) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < 1$

### Exercice 4

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}$$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < 3$

2) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$

$$3) \quad \text{on pose } V_n = \frac{1}{U_n - 3}$$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite arithmétique

b) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

### Exercice 5

Soit  $(U_n)_n$  une suite arithmétique telle que :

$$U_3 = 5 \text{ et } U_{11} = 29$$

1) déterminer la raison  $r$  de la suite  $(U_n)_n$

2) calculer la somme  $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{11}$

### Exercice 6

Soit la suite  $(U_n)_n$  définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n < 2$

2) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$

$$3) \quad \text{on pose } V_n = \frac{2}{U_n - 2}$$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite arithmétique

b) Déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

$$c) \quad \text{Calculer } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k \text{ en fonction de } n$$

### Exercice 7

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = 2U_n - 1$$

1) montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > 1$

2) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$

$$3) \quad \text{on pose } X_n = U_n - 1$$

a) montrer que  $(X_n)_n$  est une suite géométrique

b) déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

$$c) \quad \text{calculer la somme } S_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

### Exercice 8

On considère la suite  $(U_n)_n$  définie par :

$$U_0 = -\frac{3}{4} \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$$

1) a) vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} = 1 - \frac{6}{2U_n + 5}$

b) prouver que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite  $(U_n)_n$

$$3) \quad \text{on pose } V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$$

a) montrer que  $(V_n)_n$  est une suite géométrique

b) déterminer  $U_n$  en fonction de  $n$

4) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left| U_{n+1} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{6}{7} \left| U_n + \frac{1}{2} \right|$$

b) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left| U_n + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4} \left( \frac{6}{7} \right)^n$$