

Suites numériques

Exercice 1

Calculer les trois premiers termes des suites suivantes :

$$1) U_n = 2^n - n \quad 2) V_n = \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

$$3) W_0 = 2 \text{ et } W_{n+1} = \frac{2W_n + 1}{W_n + 2}$$

$$4) T_1 = 3 \text{ et } T_n = \frac{1}{2}T_{n-1} + 2$$

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 4 \text{ et } U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + 3$$

Montrer que $(U_n)_n$ est majorée par 5

Exercice 3

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -\frac{1}{2} \text{ et } U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{2U_n + 3}$$

1) montrer que $(U_n)_n$ est minorée par -1

2) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 1$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -1 \text{ et } U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 3$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique telle que :

$$U_3 = 5 \text{ et } U_{11} = 29$$

1) déterminer la raison r de la suite $(U_n)_n$

2) calculer la somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{11}$

Exercice 6

Soit la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4}{4 - U_n} \end{cases}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n < 2$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) Déterminer U_n en fonction de n

c) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ en fonction de n

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = 2 \text{ et } U_{n+1} = 2U_n - 1$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n > 1$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $X_n = U_n - 1$

a) montrer que $(X_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

c) calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$

Exercice 8

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par :

$$U_0 = -\frac{3}{4} \text{ et } U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5}$$

1) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) U_{n+1} = 1 - \frac{6}{2U_n + 5}$

b) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 < U_n < -\frac{1}{2}$

2) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

3) on pose $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

4) a) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| U_{n+1} + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{6}{7} \left| U_n + \frac{1}{2} \right|$$

b) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left| U_n + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{6}{7} \right)^n$$