SUITES NUMERIQUES - CORRECTION

Exercice n°1

1) Si $u_n=\dfrac{n+2}{n^2-1}$ alors $u_n=f(n)$ avec $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1}$ définie sur $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$. On définira donc la suite pour $n\geq 2$. Ainsi $u_3=\dfrac{3+2}{3^2-1}=\dfrac{5}{8}$ et $u_8=\dfrac{8+2}{8^2-1}=\dfrac{10}{63}$

2) Si $u_n=\sqrt{n^2-3n}$ alors $u_n=f(n)$ avec $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$ définie sur $]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$. On définira donc la suite pour $n\geq 3$. Ainsi $u_3=\sqrt{3^2-3\times 3}=\sqrt{0}=0$ et $u_8=\sqrt{8^2-3\times 8}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

3) Si $u_n=\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ alors $u_n=f(n)$ avec $f(x)=\cos\left(\dfrac{x\pi}{2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}$. On définira donc la suite pour $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $u_3=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ et $u_8=\cos\left(\dfrac{8\pi}{2}\right)=\cos(4\pi)=1$

Exercice n°2

1) La suite de terme général $u_n=(-1)^n\sqrt{n}$ est définie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $u_0=(-1)^0\sqrt{0}=1\times 0=0$, $u_1=(-1)^1\sqrt{1}=(-1)\times 1=-1$ et $u_2=(-1)^2\sqrt{2}=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$

2) La suite de terme général $u_n=\dfrac{3^n}{2^n-1}$ est définie si et seulement si $2^n-1\neq 0$. Or $2^n-1=0 \Leftrightarrow 2^n=1 \Leftrightarrow n=0$

$(u_n)_n$ n'est donc définie que pour $n\geq 1$. On calcule $u_1=\dfrac{3^1}{2^1-1}=\dfrac{3}{2-1}=3$, $u_2=\dfrac{3^2}{2^2-1}=\dfrac{9}{3}=3$ et $u_3=\dfrac{3^3}{2^3-1}=\dfrac{27}{7}$

Exercice n°3 Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=n^2+n+1$, alors

$v_{n+1}=(n+1)^2+(n+1)+1=n^2+2n+1+n+1+1\boxed{=n^2+3n+3}$

$v_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)+1=n^2-2n+1+n-1+1\boxed{=n^2-n+1}$

$v_{2n}=(2n)^2+2n+1\boxed{=4n^2+2n+1}$

$v_{3n-1}=(3n-1)^2+(3n-1)+1=9n^2-6n+1+3n-1+1\boxed{=9n^2-3n+1}$

Enfin, $v_{n+1}-v_n=n^2+3n+3-(n^2+n+1)\boxed{=2n+2}$

Exercice n°4

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}=\dfrac{1+(-1)^{n+1}\dfrac{5}{2^{(n+1)-1}}-1}{1+(-1)^n\dfrac{5}{2^{n-1}}-1}=\dfrac{(-1)^{n+1}\dfrac{5}{2^n}}{(-1)^n\dfrac{5}{2^{n-1}}}=(-1)^{n+1-n}\dfrac{5}{2^n}\times\dfrac{2^{n-1}}{5}=(-1)^1\dfrac{\cancel{5}}{2^n}\times\dfrac{2^{n-1}}{\cancel{5}}\boxed{=-\dfrac{1}{2}}$

Le rapport $\dfrac{u_{n+1}-1}{u_n-1}$ est bien indépendant de *n*.

Exercice n°5

1) La suite définie par $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+3\end{cases}$ est donc définie par $\begin{cases}u_0=-2\\u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$ avec $f(x)=\dfrac{1}{4}x+3$

On calcule ainsi $u_1=\dfrac{1}{4}u_0+3=\dfrac{1}{4}(-2)+3=-\dfrac{1}{2}+3\boxed{=\dfrac{5}{2}}$ puis $u_2=\dfrac{1}{4}u_1+3=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{2}+3=\dfrac{5}{8}+3\boxed{=\dfrac{29}{8}}$ et enfin $u_3=\dfrac{1}{4}u_2+3=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{29}{8}+3=\dfrac{29}{32}+3\boxed{=\dfrac{125}{32}}$

2) La suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \end{cases}$ est donc définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec $f(x) = \sqrt{1+x^2}$

On calcule $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} = \sqrt{1+2^2} \boxed{= \sqrt{5}}$, $u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{5}\right)^2} \boxed{= \sqrt{6}}$ et $u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+\left(\sqrt{6}\right)^2} \boxed{= \sqrt{7}}$

Exercice n°6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$u_{n+2} - 4(u_{n+1} - u_n) = (n+2)2^{n+2} - 4\left((n+1)2^{n+1} - n2^n\right)$$
$$= n2^{n+2} + 2\times 2^{n+2} - \underbrace{4}_{=2^2} n2^{n+1} - \underbrace{4}_{=2^2} \times 2^{n+1} + \underbrace{4}_{=2^2} n\times 2^n$$
$$= n2^{n+2} + 2^{n+3} - n2^{n+3} - 2^{n+3} + n2^{n+2}$$
$$= n2^{n+2} + n2^{n+2} - n2^{n+3}$$
$$= 2n2^{n+2} - n2^{n+3}$$
$$= n2^{n+3} - n2^{n+3}$$
$$= 0$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4(u_{n+1} - u_n)$

Exercice n°7

Compléter le tableau suivant pour n entier égal à 0,1, 2, et 3

	v_0	v_1	v_2	v_3
$v_{n+1} = 4v_n - 3$	2	$v_1 = 4v_0 - 3 = 4\times 2 - 3 \boxed{= 5}$	$v_2 = 4v_1 - 3 = 4\times 5 - 3 \boxed{= 17}$	$v_3 = 4v_2 - 3 = 4\times 17 - 3 \boxed{= 65}$
$v_{n+1} = (v_n - 1)^2$	4	$v_1 = (v_0 - 1)^2 = (4-1)^2 \boxed{= 9}$	$v_2 = (v_1 - 1)^2 = (9-1)^2 \boxed{= 64}$	$v_3 = (v_2 - 1)^2 = (64-1)^2$ $\boxed{= 3969}$
$v_{n+2} = 2v_{n+1} - v_n$	1	2	$v_2 = 2v_1 - v_0 = 2\times 2 - 1 \boxed{= 3}$	$v_3 = 2v_2 - v_1 = 2\times 3 - 2 \boxed{= 4}$
$v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2}$	3	5	$v_2 = \dfrac{v_1 + v_0}{2} = \dfrac{5+3}{2} \boxed{= 4}$	$v_3 = \dfrac{v_2 + v_1}{2} = \dfrac{4+5}{2} \boxed{= \dfrac{9}{2}}$

Exercice n°8

1) $x + 2 \le 3x + 3 \Leftrightarrow -1 \le 2x \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \le 2$. $S = \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right[$

2) On remarque d'abord que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{(n+1)+1}{3^{n+1}}}{\dfrac{n+1}{3^n}} = \dfrac{n+2}{3^{n+1}} \times \dfrac{3^n}{n+1} = \dfrac{n+2}{3(n+1)}$

On résout $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{n+2}{3(n+1)} < 1 \Leftrightarrow n + 2 < 3n + 3$

D'après la question précédente, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Leftrightarrow n > -\dfrac{1}{2}$, ce qui est assuré puisque $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $n \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n > -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, ceci entraîne $u_{n+1} < u_n$, et nous permet d'affirmer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice n°9

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 4$, on calcule $u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 4 - (2^n - 4) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $2^n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{0,75^n}{n^3}$, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{0,75^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{0,75^n}{n^3}} = \frac{0,75^{n+1}}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{0,75^n} = 0,75 \times \left(\frac{n}{n+1}\right)^3$

Or pour tout entier $n \geq 1$, $0 < \frac{n}{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 < 1$ et puisque $0 < 0,75 < 1$, on en déduit que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Puisque pour tout $n \geq 1$, $u_n > 0$, ceci entraîne $u_{n+1} < u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement décroissante.

3) 1ère méthode

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^3 + n$, on calcule :

$$u_{n+1} - u_n = 2(n+1)^3 + (n+1) - (2n^3 + n) = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + (n+1) - 2n^3 - n$$

$$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 + n + 1 - 2n^3 - n = 6n^2 + 6n + 3 = 3(2n^2 + 2n + 1)$$

Puisque le calcul du discriminant du polynôme $P(n) = 2n^2 + 2n + 1$ fournit $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

2ème méthode

Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^3 + n = f(n)$ avec $f(x) = 2x^3 + x$, le sens de variation de *f* nous renseignera sur celui de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 6x^2 + 1 > 0$, donc *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et on retrouve bien le résultat : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

4) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-3)^n$, on peut affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

En effet n pair $\Rightarrow u_n > 0$ et n impair $\Rightarrow u_n < 0$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc ni croissante ni décroissante

5) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1}$, il est préférable d'étudier la fonction *f* définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

Puisque $n \in \mathbb{N}$, il suffit d'étudier f sur $[0;+\infty[$. Si on note $P(x) = x^2 + x + 1$, le calcul du discriminant fournit $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$, donc $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi la fonction *f* est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$ car P l'est, et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$. Puisque l'on se restreint à $[0;+\infty[$, on peut affirmer que pour tout $x \in [0;+\infty[$, $2x + 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, donc *f* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

6) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{1}{2+\sqrt{n}}$, il est préférable d'étudier la fonction *f* définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{2+\sqrt{x}}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(2+\sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}\left(2+\sqrt{x}\right)^2}$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc *f* est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

7) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - n$, on calcule :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - (n+1) - (2^n - n) = 2^{n+1} - 2^n - n - 1 + n = 2^n(2-1) - 1 = 2^n - 1$$

Pour $n = 0$, $u_1 - u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ donc $u_1 = u_0$. Dès que $n \geq 1$, $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1 > 0$

Ainsi, mis à part $u_1 = u_0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n \geq 1$

8) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^n}$,

on calcule, pour tout $n \geq 1$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n} = \frac{n+1}{2n}$

Pour comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n}$ à 1, on calcule $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - 1 = \frac{n+1}{2n} - \frac{2n}{2n} = \frac{1-n}{2n}$.

Or pour tout $n = 1$, $\frac{u_2}{u_1} - 1 = \frac{1-1}{2} = 0$, ce qui signifie que $u_1 = u_2$. De plus pour tout $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1-n}{2n} < 0$. Ainsi pour tout $n > 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n}{2^n} \geq 0$, l'inégalité $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ équivaut à $u_{n+1} < u_n$.

Ainsi, mis à part $u_1 = u_2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante à partir de $n \geq 2$

9) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n = -\frac{1}{n}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aura le même sens de variation que la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$. Cette fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (en tant qu'opposé d'une fonction strictement décroissante sur $]0;+\infty[$), donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante

Exercice n°10

1) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin\frac{2n\pi}{3}$, on calcule $u_0 = \sin\frac{2\times 0\times\pi}{3} = \sin 0 = 0$, $u_1 = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = \sin\frac{2\times 2\pi}{3} = \sin\frac{2\times 2\pi}{3} = \sin\frac{4\pi}{3} = \sin - \frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_3 = \sin\frac{2\times 3\pi}{3} = \sin 2\pi = 0$.

Il semblerait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique de période 3.

Pour le vérifier, on calcule, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+3} = \sin\frac{2(n+3)\pi}{3} = \sin\left(\frac{2n\pi}{3} + \frac{2\times 3\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = u_n$$

Ains, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période 3.

2) Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 \end{cases}$, on calcule $v_1 = -\frac{3}{2}v_0^2 + \frac{5}{2}v_0 + 1 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} + 1 = 2$, puis $v_2 = -\frac{3}{2}v_1^2 + \frac{5}{2}v_1 + 1 = -\frac{3}{2}\times 2^2 + \frac{5}{2}\times 2 + 1 = -6 + 5 + 1 = 0$ et enfin $v_3 = -\frac{3}{2}v_2^2 + \frac{5}{2}v_2 + 1 = 1$. On retombe sur v_0 et il semblerait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit périodique de période 3.

Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+3} = v_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuons la division euclidienne de n par 3, et écrivons $n = 3q + r$ avec $0 \leq r < 2$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n = v_r$ (où r est le reste de la division euclidienne de n par 3)

La propriété est vraie pour $n = 0,1,2,3$

Supposons là vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, c'est-à-dire $v_n = v_r$ (où r est le reste de la division euclidienne de n par 3), et montrons que $v_{n+1} = v_s$ (où s est le reste de la division euclidienne de $n+1$ par 3)

Si $n = 3q + r$, $0 \leq r < 2$, alors $n+1 = 3q + r + 1$.

De trois choses l'une :

Si $n = 3q$, c'est-à-dire $r = 0$, alors $v_n = v_0$ (hypothèse de récurrence) donc $v_{n+1} = -\frac{3}{2}v_n^2 + \frac{5}{2}v_n + 1 = -\frac{3}{2}v_0^2 + \frac{5}{2}v_0 + 1 = v_1$. Comme $n+1 = 3q+1$, c'est-à-dire $s = 1$, alors on pourra bien affirmer que $v_{n+1} = v_s$

Si $n=3q+1$, c'est-à-dire $r=1$, alors $v_n=v_1$ (hypothèse de récurrence) donc $v_{n+1}=-\frac{3}{2}v_n^2+\frac{5}{2}v_n+1=-\frac{3}{2}v_1^2+\frac{5}{2}v_1+1=v_2$. Comme $n+1=3q+2$, c'est-à-dire $s=2$, alors on pourra encore affirmer que $v_{n+1}=v_s$

Si $n=3q+2$, c'est-à-dire $r=2$, alors $v_n=v_2$ (hypothèse de récurrence) donc $v_{n+1}=-\frac{3}{2}v_n^2+\frac{5}{2}v_n+1=-\frac{3}{2}v_2^2+\frac{5}{2}v_2+1=v_3=v_0$. Comme $n+1=3q+3=3(q+1)$, c'est-à-dire $s=0$, alors on pourra bien affirmer que $v_{n+1}=v_s$.

Dans tous les cas, $v_{n+1}=v_s$ (où s est le reste de la division euclidienne de $n+1$ par 3)

La phase d'hérédité est achevée, et la propriété est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

La périodicité de période 3 de la suite sur ses trois premiers termes entraîne donc sa périodicité de période 3 sur $\mathbb{N}$.

Exercice n°11

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de deux sous-suites de rang pair et impair :

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n}=\frac{2^n}{3^{n+1}}$

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $u_{2n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^n}$

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_{2n}=\frac{2^n}{3^{n+1}}$. Il est évident que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n>0$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{u_{2(n+1)}}{u_{2n}}=\frac{u_{2n+2}}{u_{2n}}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1+1}}\times\frac{3^{n+1}}{2^n}=\frac{2}{3}<1$. Ainsi $\begin{cases}\frac{v_{n+1}}{v_n}<1\\ v_n>0\end{cases}\Rightarrow v_{n+1}<v_n$ donc la (sous)-suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=u_{2n+1}=\frac{2^{n+1}}{3^n}$. Il est évident que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{u_{2(n+1)+1}}{u_{2n+1}}=\frac{u_{2n+3}}{u_{2n+1}}=\frac{2^{n+1+1}}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{2^{n+1}}=\frac{2}{3}<1$. Ainsi $\begin{cases}\frac{w_{n+1}}{w_n}<1\\ w_n>0\end{cases}\Rightarrow w_{n+1}<w_n$ donc la (sous)-suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.