

## LES SUITES NUMERIQUES

### I) GENERALITES

#### 1) Définitions et notations.

**Définition :** On appelle suite numérique toute application de  $\mathbb{N}$  (ou une partie  $I$  de  $\mathbb{N}$ ) vers  $\mathbb{R}$

$$u : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

**Notation :** Si  $u$  est une suite numérique définie

sur  $\mathbb{N}$  l'image de l'entier  $n$  par  $u$  se note  $u_n$  et s'appelle le terme de rang  $n$  de la suite

L'entier  $n$  s'appelle l'indice du terme  $u_n$

La suite numérique  $u$  se note :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_n$

#### 2) Comment générer une suite

Une suite numérique peut être définie de deux manières différentes :

##### a) Suite définie par : une expression explicite

Dans laquelle le terme  $u_n$  de la suite  $(u_n)_n$  est définie en

fonction de  $n$  **Exemple :** soit  $(u_n)_n$  la suite définie par :

$$u_n = 2n + 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

##### b) Une suite définie par : une expression récurrente

Ces suites s'appellent des suites récurrentes, elles sont définies par le (ou les) premier (s) terme (s) et une relation entre deux ou plusieurs termes consécutifs.

**Exemple1 :** Suites récurrente du premier ordre

soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite récurrente définie par :

$$u_0 = 2; u_{n+1} = 5u_n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

#### 3) Suites majorées, suites minorées, suites bornées.

**Définition :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique. ( $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ )

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_n \leq M$

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :  $\forall n \in \mathbb{I} \quad m \leq u_n$

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est bornée si elle est majorée et minorée.

**Propriété :** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est bornée si et seulement

s'il existe un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad |u_n| \leq M$$

#### 4) Monotonie d'une suite.

**Définition :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite numérique. ( $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ )

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est croissante si :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad \forall m \in \mathbb{I} : m \leq n \Rightarrow u_m \leq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est décroissante si :  $\forall n \in \mathbb{I}$

$$\forall m \in \mathbb{I} : m \leq n \Rightarrow u_m \geq u_n$$

On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est monotone si elle est croissante ou décroissante sur  $\mathbb{I}$ .

**Théorème :** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite numérique. ( $\mathbb{I} \subset \mathbb{N}$ )

• La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est croissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} \geq u_n$$

• La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  est décroissante si et seulement si :

$$\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} \leq u_n$$

### II) SUITES ARITHMETIQUES ; SUITES GEOMETRIQUES

#### 1) Suite arithmétique.

**Définition :** On appelle suite arithmétique toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  définie par son premier terme et par la relation récurrente :  $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_{n+1} = u_n + r$

Où  $r$  est un réel fixe. Le réel  $r$  s'appelle la raison de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$ .

##### 1.2) propriété caractéristique d'une suite arithmétique

*Trois termes consécutifs d'une suite arithmétique.*

$(u_n)_{n \geq p}$  est suite arithmétique si et seulement si

$$2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \quad \forall n \geq p$$

##### 1.3) Terme général d'une suite arithmétique.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{I}}$  une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_p$  l'un de ses termes on a :  $\forall n \in \mathbb{I} \quad u_n = u_p + (n - p)r$

**Remarque :** Si  $u_0$  est le premier terme d'une suite arithmétique de raison  $r$  alors :  $u_n = u_0 + nr$

Si  $u_1$  est le premier terme d'une suite arithmétique de raison  $r$  alors :  $u_n = u_1 + (n - 1)r$

## 1.4) La somme des termes successifs d'une suite arithmétique.

Soient  $(u_n)_n$  une suite arithmétique et  $p$  un entier naturel et  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n$

$$\text{On a : } S_n = \frac{(n-p+1)}{2} (u_p + u_n)$$

Avec :  $n-p+1$  le nombre des termes de la somme

$u_p$  : le premier terme de la somme

$u_n$  : le dernier terme de la somme

**Remarque :** On note la somme :

$S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$  par :

$$S_n = \sum_{k=p}^{k=n} u_k$$

$$\text{Si } p=0 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$\text{Si } p=1 \text{ on a : } S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k = \frac{n}{2} (u_1 + u_n)$$

## 2) Suite géométrique.

**2.1) Définition :** On appelle suite géométrique toute suite  $(u_n)_n$  définie par son premier terme et par la relation

récurrente :  $u_{n+1} = q u_n \quad \forall n \in I$  où  $q$  est un réel fixe. Le réel  $q$  s'appelle **la raison** de la suite  $(u_n)_n$ .

Le premier terme et la raison d'une suite géométrique s'appellent aussi les éléments de la suite géométrique.

## 2.2) Terme général d'une suite géométrique

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et si  $p$  est un entier naturel alors :  $u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$

**Cas particuliers :**

1) si  $p=0$  alors:  $u_n = q^n u_0 \quad$  2) si  $p=1$  alors :  $u_n = q^{n-1} u_1$

## 2.3) La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

**Proposition :** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite géométrique de raison  $q$ , et  $u_p$  l'un de ses termes.

Et  $S_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

**Si  $q = 1$  alors :**  $S_n = (n-p+1)u_p$

**Si  $q \neq 1$  alors :**  $S_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

**2.4) Propriété :**  $a, b$  et  $c$  sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique

si et seulement si  $b^2 = a \times c$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

