I. GENERALITES SUR LES SUITES :

01. Définition :

I est une partie de $\mathbb{N}$. toute application u de I vers $\mathbb{R}$ s'appelle suite numérique . Donc :
$u : I \to \mathbb{R}$
$n \mapsto u(n)$ on note simplement la suite par $(u_n)_{n\in I}$.

02. Exemples :

- $(w_n = 2n)_{n\geq 0}$. $v_n = \dfrac{1}{n-1}$; $n \geq 2$. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$; $n \in \mathbb{N}$. $\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \ ; \ n \geq 0 \\ u_0 = 3 \ ; \ u_1 = 4 \end{cases}$.
- Pour la dernière suite pour calculer u_{i+2} il faut calculer u_i et u_{i+1} ; la suite (u_n) est appelée suite récurrente d'ordre 2 .
- Calculer : u_2 et u_3 .

03. Vocabulaire :

- u_n s'appelle le terme général de la suite .
- u_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite avec n_0 est le plus petit élément de I .
- Le nombre $u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots u_n$ s'appelle la somme des $(n - n_0 + 1)$ premiers termes de la suite .

04. Application :

On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 1 + v_n \end{cases}$.

1. Calculer v_2 ; v_3 ; v_4 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = n$.

II. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

01. Activité :

On considère la suite $(u_n = \dfrac{1}{n})_{n>1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $u_n < 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $u_n > 0$.
3. Que peut-on déduire ?

02. Définitions :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique , M et m de $\mathbb{R}$.

- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite majorée par M équivaut à $\forall n \geq n_0$; $u_n \leq M$ (ou encore $\forall n \geq n_0$; $u_n < M$) .
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite minorée par m équivaut à $\forall n \geq n_0$; $m \leq u_n$ (ou encore $\forall n \geq n_0$; $m < u_n$)
- $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite bornée équivaut à (u_n) est une suite majorée et minorée .

03. Application :

On considère la suite numérique $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n\in\mathbb{N}}$.

1 Montrer que la suite (u_n) est majorée et minorée .

III. Monotonie d'une suite :

01. Activité :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . n et n' supérieure ou égale à n_0 .

1 Compléter pour que la suite (u_n) est croissante . $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow$............ .

2 Compléter pour que la suite (u_n) est décroissante . $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow$............ .

02. Définitions :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique .

- la suite (u_n) est croissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow u_n \geq u_{n'}$.
- la suite (u_n) est strictement croissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow u_n > u_{n'}$.
- la suite (u_n) est décroissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow u_n \leq u_{n'}$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : n>n' \Rightarrow u_n < u_{n'}$.
- la suite (u_n) est constante équivaut à : $\forall n\geq n_0 , \forall n'\geq n_0 : u_n = u_{n'}$.

03. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique .

- la suite (u_n) est croissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} \geq u_n$.
- la suite (u_n) est strictement croissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} > u_n$.
- la suite (u_n) est décroissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 : n>n' \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante équivaut à : $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} < u_n$.
- la suite (u_n) est constante équivaut à : $\forall n\geq n_0 : u_{n+1} = u_n$.

04. Application :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_n$.

1 Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

IV. Suite arithmétique :

01. Activité :

On suppose que une montagne sa hauteur est 1600 m à l'année 2000 tel que sa hauteur est influencée par l'hersions , sa hauteur démunie 2 cm chaque année .

1 Ecrire ses données sous forme d'une suite .

2 Précisé l'année tel que la hauteur sera 1599 mètre

Indication : on prend la suite : $(v_n)_{n\geq 2000}$ tel que $v_{n+1} = v_n - 2$ et $v_{2000} = 160000 = 16\times 10^4$.

02. Vocabulaire :

La suite (v_n) s'appelle suite arithmétique de raison $r=-2$.

03. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . r est un nombre réel non nul .
La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à
$\forall n\geq n_0 : u_{n+1}-u_n=r$ (ou encore $\forall n\geq n_0 : u_{n+1}=u_n+r$) .

04. Application :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n=2n+3$; $n\geq 0$.

1. Montrer que : (u_n) est une suite arithmétique et précisé ses éléments caractéristiques .

V. La formule du terme général d'une suite arithmétique :

01. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n\geq n_0 : u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$

02. Démonstration :

Démontrer la propriété précédente :

03. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a $\forall p,q\geq n_0 : u_q=u_p+(q-p)r$

04. Application :

- (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=3$ et de premier terme $u_7=10$ calculer u_{2007}.
- (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0=5$ et $u_{100}=-45$ déterminer sa raison r et u_n en fonction de n.

VI. La somme des n premier termes d'une suite arithmétique :

01. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} et $n_0\leq p\leq n$ on a :

$$S_n=\sum_{i=p}^{i=n}u_i=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\dots+u_n=\left[\frac{u_n+u_p}{2}\right]\times(n-p+1)$$ ou encore :

$$S_n=\frac{(\text{le premier terme})+(\text{le dernier terme})}{2}\times(\text{ le nombre des termes de la somme })$$.

02. Remarque :

- La somme suivante $S_n=u_0+u_1+u_2+\dots+u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-0+1$) .
- La somme suivante $S_n=u_1+u_2+u_3+\dots+u_n$ possède n terme . (c.à.d. $n-1+1$) .
- La somme suivante $S_n=u_{n_0}+u_{n_0+1}+u_{n_0+2}+\dots+u_n$ possède $n+1$ terme . (c.à.d. $n-n_0+1$) .

VII. Suite géométrique :

01. Définition :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul .

La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à

$\forall n\geq n_0 : u_{n+1} = q\times u_n$ (ou encore $\forall n\geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$; $(u_n \neq 0)$) .

VIII. La formule du terme général d'une suite géométrique (c.à.d. u_n en fonction de n)

01. Exemple : $u_n = 2\times 5^n$; $n\geq 0$

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

1 Montrer que : (u_n) est une suite géométrique et précisé ses éléments caractéristiques .

02. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n\geq n_0$: $u_n = u_{n_0}\times q^{(n-n_0)}$

03. Démonstration :

Démontrer la propriété précédente on utilise démonstration par récurrence :

04. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall p, q\geq n_0$: $u_q = u_p\times q^{q-p}$

IX. La somme des n premier termes d'une suite géométrique :

03. Propriété :

$(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} et $n_0\leq p\leq n$.

- Si $q\neq 1$ on a : $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)}-1}{q-1}\right]\times u_p$.
- Si $q = 1$ on a : $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p(n-p+1)$.

X. La moyenne arithmétique – la moyenne géométrique :

01. Propriété 1 :

Si $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois terme consécutifs d'une suite arithmétique alors $u_i + u_{i+2} = 2u_{i+1}$ ou encore $a + c = 2b$. (on n'oublie pas $u_i = u_{i+1} - r$ et $u_{i+2} = u_{i+1} + r$) .

La relation $a + c = 2b$ (ou $u_i + u_{i+2} = 2u_{i+1}$) s'appelle moyenne arithmétique .

02. Propriété 2 :

Si $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois terme consécutifs d'une suite géométrique alors $u_i\times u_{i+2} = (u_{i+1})^2$ ou encore $a\times c = b^2$. (on n'oublie pas $u_i = u_{i+1} - r$ et $u_{i+2} = u_{i+1} + r$) .

La relation $a\times c = b^2$ (ou $u_i\times u_{i+2} = (u_{i+1})^2$) s'appelle moyenne géométrique .