

## Trigonométrie circulaire

\* très facile \*\* facile \*\*\* difficulté moyenne \*\*\*\* difficile  
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

### Exercice n° 1 (\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, 2\pi]$  les équations suivantes :

1)  $\sin x = 0$     2)  $\sin x = 1$     3)  $\sin x = -1$     4)  $\cos x = 1$     5)  $\cos x = -1$   
6)  $\cos x = 0$     7)  $\tan x = 0$     8)  $\tan x = 1$ .

### Exercice n° 2 (\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, 2\pi]$  les équations suivantes :

1)  $\sin x = \frac{1}{2}$     2)  $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$     3)  $\tan x = -1$     4)  $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$     5)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$     6)  $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

### Exercice n° 3 (\*\*IT)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans I les équations suivantes :

1)  $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$     2)  $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , I =  $[0, 4\pi]$     3)  $\tan(5x) = 1$ , I =  $[0, \pi]$   
4)  $\cos(2x) = \cos^2 x$ , I =  $[0, 2\pi]$     5)  $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ , I =  $[0, 2\pi]$     6)  $\cos(nx) = 0$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ )  
7)  $|\cos(nx)| = 1$     8)  $\sin(nx) = 0$     9)  $|\sin(nx)| = 1$   
10)  $\sin x = \tan x$ , I =  $[0, 2\pi]$     11)  $\sin(2x) + \sin x = 0$ , I =  $[0, 2\pi]$     12)  $12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2$ , I =  $[-\pi, \pi]$ .

### Exercice n° 4 (\*\*IT)

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

1)  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ , I =  $[-\pi, \pi]$     2)  $\sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , I =  $\mathbb{R}$     3)  $\cos x > \cos \frac{x}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$   
4)  $\cos^2 x \geq \cos(2x)$ , I =  $[-\pi, \pi]$     5)  $\cos^2 x \leq \frac{1}{2}$ , I =  $[0, 2\pi]$     6)  $\cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}$ , I =  $[0, 2\pi]$ .

### Exercice n° 5 (\*I)

Calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$  et  $\sin \frac{\pi}{8}$ .

### Exercice n° 6 (\*I)

Calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

### Exercice n° 7 (\*\*\*)

Montrer que  $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$  (la somme comporte  $2^n$  termes).

### Exercice n° 8 (\*\*\*)

1) Calculer  $\prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$  pour a élément donné de  $]0, 2\pi[$  (penser à  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ ).

2) Pour  $a \in ]0, \pi[$ , déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$ .

### Exercice n° 9 (\*\*)

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$ .

### Exercice n° 10 (\*\*\*)

Soit a un réel distinct de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

1) Calculer  $\tan(3\theta)$  en fonction de  $\tan \theta$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

**Exercice n° 11 (\*\*\*)** Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans  $[0, \pi]$  ?

**Exercice n° 12 (\*\*I)**

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lllll} 1) x \mapsto \cos^2 x & 2) x \mapsto \cos^4 x & 3) x \mapsto \sin^4 x & 4) x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x & 5) x \mapsto \sin^6 x \\ 6) x \mapsto \cos x \sin^6 x & 7) x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x & 8) x \mapsto \cos^3 x. & & \end{array}$$

**Exercice n° 13 (\*\*I)**

$$\text{Calculer } I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx \text{ et } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx.$$

**Exercice n° 14 (\*\*)**

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} & 2) \sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ 3) \tan \left( \frac{\pi}{4} + x \right) + \tan \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2}{\cos(2x)} & 4) \frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}. \end{array}$$

**Exercice n° 15 (\*\*\*)**

Soit  $k$  un réel distinct de  $-1$  et de  $1$ .

$$1) \text{ Etudier les variations de } f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}}.$$

$$2) \text{ Calculer } \int_0^\pi f_k(x) \, dx.$$

**Exercice n° 16 (\*\*I)**

Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

$$2) \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin^2(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

$$3) \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

**Exercice n° 17 (\*\*\*)**

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois réels.}$$

**Exercice n° 18 (\*\*)**

$$\text{Montrer que } \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

**Exercice n° 19 (\*\*\*)**

$$1) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } \cos(3x) = \sin(2x).$$

$$2) \text{ En déduire les valeurs de } \sin x \text{ et } \cos x \text{ pour } x \text{ élément de } \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}.$$

**Exercice n° 20 (\*\*IT)**

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1)} \ f_1 : x \mapsto 2 \cos(x) + \cos(2x) & \mathbf{2)} \ f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} \\ \mathbf{3)} \ f_3 : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x) & \mathbf{2)} \ f_4 : x \mapsto \frac{2 \sin(x) + 1}{2 \cos(x) + 1} \end{array}$$