

Trigonométrie circulaire

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
 I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (*IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

$$\begin{array}{lllll} 1) \sin x = 0 & 2) \sin x = 1 & 3) \sin x = -1 & 4) \cos x = 1 & 5) \cos x = -1 \\ 6) \cos x = 0 & 7) \tan x = 0 & 8) \tan x = 1. & & \end{array}$$

Exercice n° 2 (*IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ les équations suivantes :

$$1) \sin x = \frac{1}{2} \quad 2) \sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 3) \tan x = -1 \quad 4) \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5) \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 6) \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exercice n° 3 (**IT)

Résoudre dans \mathbb{R} puis dans I les équations suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1) \sin(2x) = \frac{1}{2}, I = [0, 2\pi] & 2) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, I = [0, 4\pi] & 3) \tan(5x) = 1, I = [0, \pi] \\ 4) \cos(2x) = \cos^2 x, I = [0, 2\pi] & 5) 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0, I = [0, 2\pi] & 6) \cos(nx) = 0 (n \in \mathbb{N}^*) \\ 7) |\cos(nx)| = 1 & 8) \sin(nx) = 0 & 9) |\sin(nx)| = 1 \\ 10) \sin x = \tan x, I = [0, 2\pi] & 11) \sin(2x) + \sin x = 0, I = [0, 2\pi] & 12) 12\cos^2 x - 8\sin^2 x = 2, I = [-\pi, \pi]. \end{array}$$

Exercice n° 4 (**IT)

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \cos x \leq \frac{1}{2}, I = [-\pi, \pi] & 2) \sin x \geq -\frac{1}{\sqrt{2}}, I = \mathbb{R} & 3) \cos x > \cos \frac{x}{2}, I = [0, 2\pi] \\ 4) \cos^2 x \geq \cos(2x), I = [-\pi, \pi] & 5) \cos^2 x \leq \frac{1}{2}, I = [0, 2\pi] & 6) \cos \frac{x}{3} \leq \sin \frac{x}{3}, I = [0, 2\pi]. \end{array}$$

Exercice n° 5 (*I)

Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.

Exercice n° 6 (*I)

Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice n° 7 (***)

Montrer que $\sum \cos(a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n) = 2^n \cos a_1 \cos a_2 \dots \cos a_n$ (la somme comporte 2^n termes).

Exercice n° 8 (***)I

$$1) \text{ Calculer } \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right) \text{ pour } a \text{ élément donné de }]0, 2\pi[\text{ (penser à } \sin(2x) = 2\sin x \cos x).$$

$$2) \text{ Pour } a \in]0, \pi[, \text{ déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right).$$

Exercice n° 9 (**)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2^{4 \cos^2 x + 1} + 16 \times 2^{4 \sin^2 x - 3} = 20$.

Exercice n° 10 (***)

Soit a un réel distinct de $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$1) \text{ Calculer } \tan(3\theta) \text{ en fonction de } \tan \theta$$

PROF: ATMANI NAJIB

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} = \frac{3a - a^3}{1 - 3a^2}.$$

On trouvera deux méthodes, l'une algébrique et l'autre utilisant la formule de trigonométrie établie en 1).

Exercice n° 11 (*)** Combien l'équation

$$\tan x + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0,$$

possède-t-elle de solutions dans $[0, \pi]$?

Exercice n° 12 (I)**

Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lllll} 1) x \mapsto \cos^2 x & 2) x \mapsto \cos^4 x & 3) x \mapsto \sin^4 x & 4) x \mapsto \cos^2 x \sin^2 x & 5) x \mapsto \sin^6 x \\ 6) x \mapsto \cos x \sin^6 x & 7) x \mapsto \cos^5 x \sin^2 x & 8) x \mapsto \cos^3 x. \end{array}$$

Exercice n° 13 (*)**

$$\text{Calculer } I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^6 x \, dx \text{ et } J = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^4 x \sin^7 x \, dx.$$

Exercice n° 14 ()**

Démontrer les identités suivantes, en précisant à chaque fois leur domaine de validité :

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} & 2) \sin \left(x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x + \sin \left(x + \frac{2\pi}{3} \right) = 0 \\ 3) \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) + \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{2}{\cos(2x)} & 4) \frac{1}{\tan x} - \tan x = \frac{2}{\tan(2x)}. \end{array}$$

Exercice n° 15 (*)**

Soit k un réel distinct de -1 et de 1 .

$$1) \text{Etudier les variations de } f_k : x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{1 - 2k \cos x + k^2}}.$$

$$2) \text{Calculer } \int_0^\pi f_k(x) \, dx.$$

Exercice n° 16 (*)**

Calculer les sommes suivantes :

$$1) \sum_{k=0}^n \cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

$$2) \sum_{k=0}^n \cos^2(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin^2(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

$$3) \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(kx), (x \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N} \text{ donnés}).$$

Exercice n° 17 (*)**

$$\text{Résoudre le système } \begin{cases} \cos a + \cos b + \cos c = 0 \\ \sin a + \sin b + \sin c = 0 \end{cases} \text{ où } a, b \text{ et } c \text{ sont trois réels.}$$

Exercice n° 18 ()**

$$\text{Montrer que } \cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{5\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}.$$

Exercice n° 19 (*)**

$$1) \text{Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation } \cos(3x) = \sin(2x).$$

$$2) \text{En déduire les valeurs de } \sin x \text{ et } \cos x \text{ pour } x \text{ élément de } \left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} \right\}.$$

Exercice n° 20 (**IT)

Etude complète et graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) f_1 : x \mapsto 2 \cos(x) + \cos(2x) & 2) f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{2 - \cos(x)} \\ 3) f_3 : x \mapsto |\tan(x)| + \cos(x) & 2) f_4 : x \mapsto \frac{2 \sin(x) + 1}{2 \cos(x) + 1} \end{array}$$