

Exercice 6

- 1) montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad | \sin x + \cos x | \leq \sqrt{2}$
- 2) on considère l'équation

$$(E): \quad 1 + \cos^3 x + \sin^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$$
- a) on pose $y = \sin x + \cos x$ calculer $\sin x \cos x$ et $\sin^3 x + \cos^3 x$ en fonction de y
- b) montrer que $(E) \Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 2y - 5) = 0$
- 3) résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E)

Exercice 7

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$ pour tout n de \mathbb{N}^*

- 1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:
$$\sin\frac{\pi}{6} \times \sin\frac{k\pi}{3} = \frac{1}{2} \left[\cos\frac{(2k-1)\pi}{6} - \cos\frac{(2k+1)\pi}{6} \right]$$
- 2) monter que

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \times S_n = \frac{1}{2} \left[\cos\frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{6}\right) \right]$$
- 3) en déduire que

$$S_n = 2 \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{(n+1)\pi}{6}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Exercice 8

On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour tout $n \geq 2$

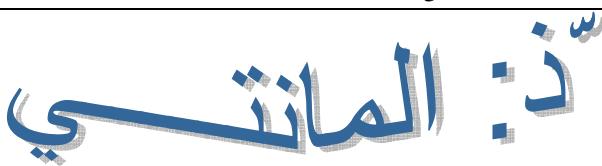
- 1) calculer T_2 et T_3
- 2) a) prouver que $T_n \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = T_n - \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$
- b) en déduire que $T_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \quad (\forall n \geq 2)$

Exercice 9

On pose $F(x) = \cos 3x + \cos 2x$

- 1) résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $F(x) = 0$
- 2) prouver que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- 3) en déduire que

$$F(x) = (1 + \cos x)(4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1)$$
- 5) déterminer la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$



Exercice 1

On pose $A = \frac{\cos \frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18}}$

1. montrer que $\cos \frac{\pi}{18} - \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{18} = 2 \cos \frac{7\pi}{18}$
2. prouver que $\cos \frac{\pi}{18} \sin \frac{\pi}{18} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{9}$
3. déduire la valeur de A

Exercice 2

On pose $\alpha = \frac{\pi}{10}$ 1) vérifier que $\sin 2\alpha = \cos 3\alpha$

- 2) montrer que $\cos 3\alpha = \cos \alpha (1 - 4 \sin^2 \alpha)$
- 3) Déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{10}$ et $\cos \frac{\pi}{10}$
- 4) Calculer $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{10}$

Montrer que $\sin \frac{7\pi}{30} = \frac{1}{8} (\sqrt{30 + 6\sqrt{5}} + 1 - \sqrt{5})$

Exercice 3

On considère dans \mathbb{R}^+ l'équation

$$(E) \quad 8X^3 - 6X - 1 = 0$$

- 1) a) montrer que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- b) résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$
- 2) a) déduire les solutions de (E)
- b) déterminer la valeur de

$$a = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9}$$

mathémanti

$$\text{Et } b = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9}$$

Exercice 4

Soit α de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

- 1) montrer que $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
- 2) a) montrer que $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
- b) en déduire que $\cos 3\alpha = \sin \alpha$
- 3) résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\cos 3x = \sin x \text{ puis déduire que } \alpha = \frac{\pi}{8}$$

- 4) résoudre dans \mathbb{R} l'équation

$$\cos x - (\sqrt{2}-1) \sin x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Exercice 5

Montrer que $\prod_{k=0}^{n} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}$