

CALCUL TRIGONOMETRIQUE

Exercice1 : 1) Calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) montrer que : $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4) montrer que : $\sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin x = 0$

Solution :

$$1) \cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$3) \cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos x$$

$$\cos(x + \frac{\pi}{3}) + \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 2 \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$4) \sin(x + \frac{2\pi}{3}) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos x$$

$$\sin(x + \frac{2\pi}{3}) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \cos x$$

$$\sin(x - \frac{2\pi}{3}) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x - \frac{2\pi}{3}) + \sin x = -2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$$

Exercice2 :

Soient : $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$ et $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1) Calculer : $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution : calcul de $\cos b$:

$$\text{on a } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cos^2 b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or : } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

calcul de : $\sin a$

$$\text{on a : } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\text{donc : } \sin^2 a = \frac{3}{4} \text{ donc } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2) on a : $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$$\text{Donc : } \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Exercice3 : Calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice4 : calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$

Solution : on a $\frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8}$ donc $\cos \frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \frac{\pi}{8}\right)$

D'après : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (1)

On a donc : $\cos \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 1$ donc :

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

donc : $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ ou $\cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ donc : $\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

donc : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

D'après : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ (2)

On a donc : $\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{8}$ donc :

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

donc : $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ ou $\sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

Or $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ donc : $\sin \frac{\pi}{8} > 0$ donc : $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

Exercice5 : Sachant que $\sin x = \frac{1}{2}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer : $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution : on a : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos(2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

Et on a : $\sin(2x) = 2\sin x \times \cos x$ il faut Calculer $\cos x$?

on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{ donc : } \cos^2 x = \frac{8}{9}$$

$$\text{donc : } \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

or $0 < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x = \frac{\sqrt{8}}{3}$

$$\text{donc : } \sin(2x) = 2 \cdot \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$$

Exercice6 : Montrer que : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin(3x-x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2 \end{aligned}$$

Exercice7 : Montrer que :

1) $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\sin \alpha \neq -1$ alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Solution :

1) on a : $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

Car : $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ (2) et $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ (3)

Donc : $1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$

2) on a : $1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ et $1 + \sin \alpha = 1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right)$$

Donc : $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ et $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$

$$\text{Donc : } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} \right)^2 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

Exercice8 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$

1) $\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \times \cos 2x$

2) $2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$

Solution :

1) $\sin^2 2x - \cos 2x - 1 = (\sin 2x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 - 1$

$4 \cos^2 x \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x \cos 2x$

2) $2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 12(1 - \sin^2 x) = -10 \sin^2 x + 12$

$$= \frac{-10}{2}(1 - \cos 2x) + 12 = -5(1 - \cos 2x) + 12 = 5 \cos 2x + 7$$

Exercice9 : Calculer $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$

Solution :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

Exercice10 : Calculer $\tan \frac{11\pi}{12}$

Exercice11 :

1- Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan \left(\frac{\pi}{8} \right)$

Solution : 1) utiliser le déterminant Δ

2) utiliser : $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ (2) on remplaçant : $x = \frac{\pi}{8}$

Exercice12 : soit $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer $\cos a$ et $\sin a$ et $\tan a$

Solution : on a $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$$

Exercice13 : 1- Montrer que $\tan \left(\frac{\pi}{12} \right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

$$(E): 2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$, résoudre l'équation (E)

$$\text{(remarquer que } 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2\text{)}$$

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice14 : Transformer en produits les expressions suivantes :

$$1) A(x) = \sin 2x + \sin 4x$$

$$2) B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

Solution : 1)

$$A(x) = \sin 2x + \sin 4x = 2 \sin \left(\frac{2x+4x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x-4x}{2} \right)$$

$$\sin 2x + \sin 4x = 2 \sin 3x \cos(-2x) = 2 \sin 3x \cos 2x$$

$$2) \text{on a : } \cos x + \cos 3x = 2 \cos \left(\frac{3x+x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x-x}{2} \right) = 2 \cos 2x \cos x$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 2 \cos \left(\frac{4x+2x}{2} \right) \cos \left(\frac{4x-2x}{2} \right) = 2 \cos 3x \cos x$$

$$\text{Donc : } B(x) = 2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x)$$

$$\text{Et on a : } \cos 2x + \cos 3x = 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

$$\text{Donc : } B(x) = 4 \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

Exercice15 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

Exercice16 : écrire sous la forme d'une somme

$$1) \cos 2x \times \sin 4x \quad 2) \sin x \times \sin 3x \quad 3) \cos 4x \times \cos 6x$$

Solution :

$$1) \cos 2x \times \sin 4x = \frac{1}{2} (\sin(2x+4x) - \sin(2x-4x)) = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(-2x))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2) \sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos(x+3x) - \cos(x-3x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$3) \cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} (\cos(4x+6x) + \cos(4x-6x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

Exercice17 : calculer

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} \quad 2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$$

Solution :

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left(\sin \pi + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

Exercice18 : Montrer que

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)$$

$$3) \text{en déduire que: } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

Solution :

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(-\frac{2\pi}{11} \right) = 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11}$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(-\frac{2\pi}{11} \right) = -2 \cos \frac{5\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$$

$$3) \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{2 \sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)}{-2 \cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

$$= -\frac{\sin \left(\frac{5\pi}{11} \right) \cos \left(\frac{2\pi}{11} \right)}{\cos \left(\frac{5\pi}{11} \right) \sin \left(\frac{2\pi}{11} \right)} = -\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right) \times \frac{1}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)} = -\frac{\tan \left(\frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left(\frac{2\pi}{11} \right)}$$

$$\text{Exercice 19 : Montrer que } \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$$

Solution : on a :

$$\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin \left(\frac{2x+4x}{2} \right) \sin \left(\frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \sin(3x) \sin x$$

$$\text{et } \cos 2x + \cos 4x = -2 \cos \left(\frac{2x+4x}{2} \right) \cos \left(\frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \cos 3x \cos x$$

$$\text{donc : } \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x \sin x}{2 \cos 3x \cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan 3x \times \tan x$$

$$\text{car : } \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x$$

Exercice 20 : Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$$

Solution :

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = \left(\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) \left(\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \cos \left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = 2 \cos(2x) \cos \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = -2 \sin \left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = -2 \sin(2x) \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos \left(\frac{x}{2} \right) \times -2 \sin(2x) \sin \left(\frac{x}{2} \right)$$

$$= -2 \cos(2x) \times \sin(2x) 2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \sin \left(\frac{x}{2} \right) = -\sin(4x) \sin x$$

Exercice 21 : Montrer que } \forall x \in \mathbb{R}

$$1) \sin 3x = \sin x \times (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

Solution :

$$1) \sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x \\ = 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x \\ = 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ = \cos x (2 \cos^2 x - 1) + \sin x \times 2 \cos x \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x \\ = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^2 x \\ = 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) \cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2 (2 \cos^2 x - 1)^2 - 1 \\ = 2 (4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$$

$$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times 2 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) \text{ ??}$$

Methode 1

$$\frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos(x+2x)) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x) \\ = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \sin x \cos x) \\ = \frac{1}{4} (2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x + 3 \cos x) = \frac{1}{4} (4 \cos^3 x) = \cos^3 x$$

Methode 1

$$\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \times \cos x = \frac{1}{2} (\cos x + \cos 2x \times \cos x) \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \left(\cos x + \frac{1}{2} (\cos 3x + \cos x) \right) = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x \\ \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

Exercice 22 : } P(x) = \sin 2x - \sin x \text{ et } Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x

$$\text{Montrer que : } P(x) = \sin x (2 \cos x - 1) \text{ et }$$

$$Q(x) = \cos x (2 \cos x + 1)$$

Solution :

$$Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2 \cos^2 x - 1 = \cos x + 2 \cos^2 x = \cos x (1 + 2 \cos x)$$

$$P(x) = \sin 2x - \sin x = 2 \sin x \cos x - \sin x = \sin x (2 \cos x - 1)$$

Exercice 23 : 1- Linéariser : } 2 \cos^2 x \cdot \sin(2x)

2- Linéariser : } \cos^3 x

Exercice 24 : 1. Résoudre dans } \mathbb{R} l'équation :

$$\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Exercice25 :

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

Exercice26 :

1) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

Exercice27 :1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations

suivantes : $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0 ; \pi]$ l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équations suivantes :

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

Solution : 1) on a $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ssi

$$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } 2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ Ssi}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$2) \text{ on a } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ssi}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$\text{ssi } 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{Donc } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$:

$$0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1 \quad \text{Donc } -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36} \quad \text{Donc} \\ -0,29 \leq k \leq 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ ou } k = 1$$

$$\text{Pour } k = 0 \text{ on trouve } x_1 = \frac{7\pi}{36}$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$$

• Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1 \quad \text{Donc } -\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24} \quad \text{Donc}$$

$$-0,54 \leq k \leq 0,04 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc k n'existe pas

$$\bullet \text{ Donc } S_{[0,\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36} \right\}$$

3) on a $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définiessi

$$2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ssi } 2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$$

$$\text{ssi } 2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi \text{ssi } x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{Donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ Donc

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Donc } 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ssi } 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi \text{ ssi}$$

$$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi \text{ ssi } x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

Encadrement de $\frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$$

donc $-\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$ donc $-\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20}$ Donc $-1,45 \leq k \leq 0,55$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1 = \frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve $x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$

Donc $S = \left\{ -\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40} \right\}$

Exercice28 : $\cos x - \sin x = a=1$ et $b=-1$

calculons : $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

Exercice29 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$$b=1 \text{ et } a=\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

Exercice30 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

Exercice31 : Considérons l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

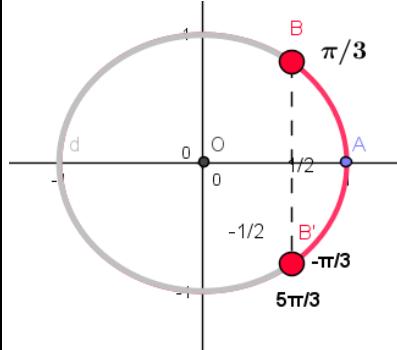
Tout d'abord il faut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et on constate que les réels qui

vérifient l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisses curvilignes des points qui se situent sur l'arc $M'IM$ (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi, \pi]} = \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

les solutions dans $[0, 2\pi]$ sont :

$$S_{[0, 2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right]$$

Exercice32 : Résoudre dans $[0, 3\pi]$ l'inéquation :

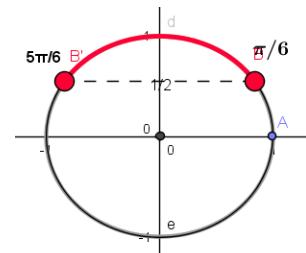
$$2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

Exercice33 : Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc } S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



Exercice34 : Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation

$$\text{suivante : } \tan x - 1 \geq 0$$

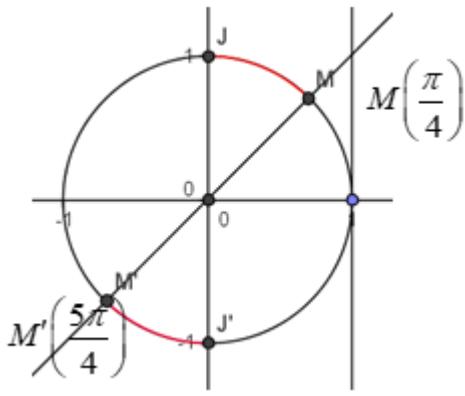
On a $\tan x - 1 \geq 0$ ssi $\tan x \geq 1$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ Les arcs MJ et $M'J'$ en rouge

correspond a tous les points $M(x)$ tq x vérifie

$$\tan x - 1 \geq 0 \quad \text{Donc}$$

$$S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$$



Exercice35 : Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation suivante : $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Les arc MJ et $M'J'$ en rouge correspondent à tous les points $M(x)$ tq x vérifie $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$. Donc

$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Exercice36 : 1) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

Solution : Transformation de : $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$$b = -1 \text{ et } a = \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$:

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{2}$$

• Encadrement de $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\text{Donc } -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{5}{6} \text{ Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_2 = \frac{\pi}{6}$$

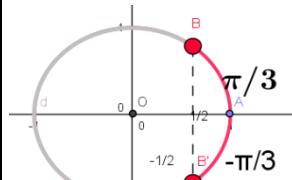
$$\text{Donc } S_{[-\pi, \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 ?$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{1}{2}$$

On pose : $X = x + \frac{\pi}{6}$ donc $\cos X \geq \frac{1}{2}$



$$\cos X \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \quad \text{donc } S_{[-\pi, \pi]} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right]$$

Exercice37 : 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équations suivantes : $2 \sin^2 x - 9 \sin x - 5 = 0$ et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante :

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante :

$$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

solution: 1) a) on pose $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans \mathbb{R}

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{Donc}$$

$$0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 1$$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \quad \text{Donc}$$

$$-0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on remplace on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi}$

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

Donc $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0 \text{ ssi } \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond à tous les points $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$$

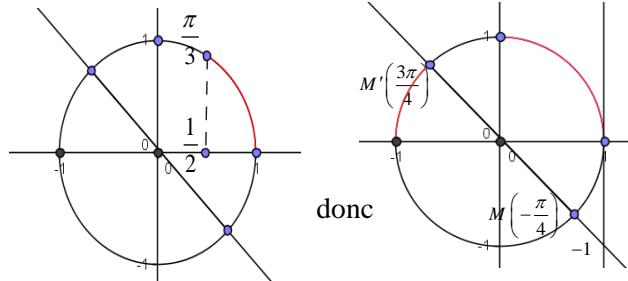
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie

dans $[0; \pi]$ ssi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2\cos x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x + 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq -1 \text{ ssi } \tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	-	+	-	0
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	-	+	0	-

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$

Exercice 38 : 1. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation :

$$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$

Exercice 39 :

Résoudre dans $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$ l'équation $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice 40 ::

soit $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$

Et calculer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3)a) Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équations: $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans I l'inéquations: $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Solution : 1)

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^2 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3) \end{aligned}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

2) $A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 $= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x$

3)a) $A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Car : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$$

Puisque : $\Delta < 0$ alors cette équation n'admet pas de solutions dans \mathbb{R} donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

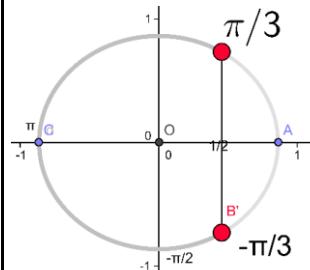
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $S_{[-\pi, \pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$

3)b) $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$

Puisque : $\Delta < 0$ alors $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} > 0$

Donc : $A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$



$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

Exercice 41 : on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

1) monter que : $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) monter que : $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) en déduire que : $A = \frac{3}{16}$

Solution :

On a : $\sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$

1): $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) - \cos \left(-\frac{3\pi}{9} \right) \right)$

$$\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

Donc : $\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$

2) On a : $\cos a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

Donc : $\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

3) déduction : $A = \frac{3}{16}$?

$$A = \left(\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \right) \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \left(\pi - \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{3}{16} \text{ Donc : } A = \frac{3}{16}$$

Exercice 42: soit : $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5$

1) montrer que : $5\sin \theta - 3\cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de : $\cos \theta$ et $\sin \theta$

Solution : 1) $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 - 5\cos \theta$

$$\Leftrightarrow 3\sin \theta = 5(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 \times 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } 1 - \cos \theta = 2\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Donc: } 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 10\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 10\sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } \sin \theta = 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6\cos \frac{\theta}{2} = 10\sin \frac{\theta}{2} \text{ car } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0$$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Or on sait que : } \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \text{ et } \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{5 \left(2 \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{3 \left(1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{10 \times \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{25}} - \frac{3 \left(1 - \frac{9}{25} \right)}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{102}{34} = 3$$

2) on a le système: $\begin{cases} 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \\ 5\sin \theta - 3\cos \theta = 3 \end{cases}$ on le résolvant on

$$\text{trouve: } \cos \theta = \frac{8}{17} \text{ et } \sin \theta = \frac{15}{10}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

