

## CALCUL TRIGONOMETRIQUE

### Formules de transformations

#### I) RAPPELLES

##### 1) Cercle trigonométrique

**Définition :** Le cercle trigonométrique est un cercle de centre  $O$  l'origine du plan de rayon  $R = 1$  orienté une orientation positive. et admet une origine  $I$

##### 2) Les abscisses curvilignes

##### 1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T

Soit  $(C)$  le cercle trigonométrique d'origine  $I$ ; considérons l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  tel que  $O$  l'abscisse de  $I$  sur l'axe perpendiculaire sur  $(OI)$ . Si on fait enrouler le segment qui représente  $]-\pi, \pi]$  au tour du cercle  $(C)$  on remarque que chaque point  $N$  d'abscisse  $\alpha$  de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$  s'associe avec un point unique  $M$  du cercle trigonométrique.

**Le réel  $\alpha$  s'appelle l'abscisse curviligne principale du point  $M$**

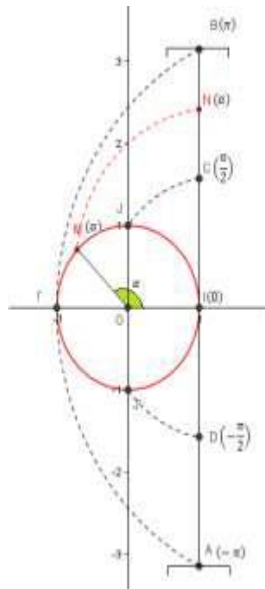
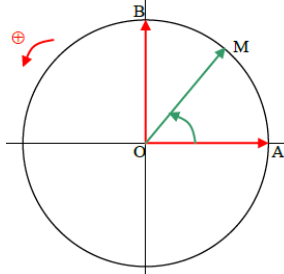
et inversement si  $\alpha$  est un réel de l'intervalle  $]-\pi, \pi]$ , alors il existe un point  $M$  unique de  $(C)$  qui s'associe avec le point  $N(\alpha)$ . Le réel  $\alpha$  représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique  $[IOM]$

##### 1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique  $(C)$  d'origine  $I$ .  $(\Delta)$  est la droite Passant par  $I$  et perpendiculaire à  $(OI)$  et d'unité égale à  $OJ$ .

Soit  $M$  un point sur le cercle  $(C)$  et d'abscisse curviligne principale  $\alpha$ .

Si on suppose que la droite  $(\Delta)$  est un fil qu'on peut enrouler autour du cercle  $(C)$  on remarque que la point  $M$  du cercle  $(C)$  coïncide avec une infinité de points de la droite  $(\Delta)$ ; et qui ont pour abscisses



$\dots (\alpha - 6\pi), (\alpha - 4\pi), (\alpha - 2\pi), (\alpha), (\alpha + 2\pi) \dots$

En générale : chaque point  $N_k$  de la droite  $(\Delta)$  qui coïncidera avec le point  $M$  aura pour abscisse  $\alpha + k2\pi$ . Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point  $M$  sur le cercle  $(C)$ .

**Définition :** Soit  $M$  un point sur le cercle  $(C)$  et d'abscisse curviligne principale  $\alpha$ . Les réels qui s'écrivent de la forme  $\alpha + 2k\pi$  où  $k$  est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point  $M$  sur le cercle  $(C)$ .

#### II) TRANSFORMATION DE $\cos(x - y)$ ET CONSEQUENCES.

##### 1) Formules de l'addition :

**Activité :** Soit  $M$  et  $N$  deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes Respectifs  $x$  et  $y$ .

- 1- Calculer  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$  de deux façons différentes.
- 2- En déduire  $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
- 3- Calculer  $\cos(x + y)$  en fonction des valeurs trigonométriques de  $x$  et de  $y$ .
- 4- Calculer  $\sin(x + y)$  et  $\sin(x - y)$  en fonction des valeurs trigonométriques de  $x$  et de  $y$ .

**Propriété 1 :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad (1) \\ \cos(x + y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (2) \\ \sin(x + y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (3) \\ \sin(x - y) &= \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad (4) \end{aligned}$$

**Exemple :** 1) Calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$

2) Calculer  $\cos \frac{5\pi}{12}$  et  $\sin \frac{5\pi}{12}$

3) montrer que :  $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

4) montrer que :  $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

**Solution :**

$$1) \cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$3) \left( \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \right) = \cos x \text{ ?}$$

$$\cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos x - \sin \frac{\pi}{3} \sin x + \cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x$$

$$= \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 2 \times \frac{1}{2} \cos x = \cos x$$

$$4) \sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) + \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin x \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} \cos x = \sin x \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right) \cos x$$

$$\sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin x \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\sin \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) + \sin \left( x - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin x = -2 \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x = -\sin x + \sin x = 0$$

### Exercice1 :

$$\text{Soient : } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos a = \sin b = \frac{1}{2}$$

1) Calculer :  $\sin a$  et  $\cos b$

2) Calculer :  $\sin(a+b)$

**Solution :** calcul de  $\cos b$  :

$$\text{on a } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\cos^2 b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Or : } 0 < b < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

calcul de :  $\sin a$

$$\text{on a : } \cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \cos^2 a \Leftrightarrow \sin^2 a = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

|          | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |

$$\text{donc : } \sin^2 a = \frac{3}{4} \text{ donc}$$

$$\sin a = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou}$$

$$\sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < a < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) \text{ on a : } \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\text{Donc : } \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\text{Exercice2 : Calculer } \cos \frac{11\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{11\pi}{12}$$

### 2) Formules d'angle double.

D'après propriété1 ligne (2) on a :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ et on sait que } \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x.$$

D'après Propriété1 ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

**Propriété2 :** Pour tout réel  $x$  on a :

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x \quad (3)$$

$$\text{Exemple : calculer } \cos \frac{\pi}{8} \text{ et } \sin \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Solution : on a } \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\pi}{8} \text{ donc } \cos \frac{\pi}{4} = \cos \left( 2 \frac{\pi}{8} \right)$$

$$\text{D'après : } \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \quad (1)$$

$$\text{On a Donc : } \cos \frac{\pi}{4} = 2\cos^2 \frac{\pi}{8} - 1 \text{ donc :}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \cos \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{donc : } \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\text{D'après : } \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \quad (2)$$

On a Donc :  $\cos \frac{\pi}{4} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{8}$  donc :

$$\sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} \text{ ou } \sin \frac{\pi}{8} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\text{Or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} > 0 \text{ donc : } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

**Exercice3 :** Sachant que  $\sin x = \frac{1}{2}$  et  $0 < x < \frac{\pi}{2}$

calculer :  $\cos(2x)$  et  $\sin(2x)$

**Solution :** on a :  $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$

$$\text{Donc : } \cos(2x) = 1 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Et on a :  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$  il faut Calculer  $\cos x$  ?

$$\text{on a : } \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ Donc : } \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\text{Donc : } \cos^2 x = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ donc : } \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\text{donc : } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{or } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{donc : } \sin(2x) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Exercice4 :** Montrer que :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad \forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

**Solution :**

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2 \end{aligned}$$

**3) Formules du demi-angle.**

D'après : propriété2 ligne (1) et (2) on a :

**Propriété3 :** Pour tous réels  $x$  et  $y$  on a :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (1)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad (2)$$

D'après propriété2

$$\text{Propriété4 : } \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \quad (1)$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \quad \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

**Exemple :** montrer que :

$$1) 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)$$

2) si  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\sin \alpha \neq -1$  alors

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**Solution :**

$$1) \text{on a : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\text{Car : } \cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \quad (2) \text{ et } \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \quad (3)$$

$$\text{Donc : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$2) \text{ on a : } 1 - \sin \alpha = 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

**Exercice5 :** Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = -2 \cos^2 x \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 5 \cos 2x + 7$$

**Solution :**

$$1) \sin^2 2x - \cos 2x - 1 = (2 \cos x \sin x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 - 1$$

$$4 \cos^2 x \sin^2 x - 2 \cos^2 x = -2 \cos^2 x \cos 2x$$

$$2) 2 \sin^2 x + 12 \cos^2 x = 2 \sin^2 x + 12(1 - \sin^2 x) = -10 \sin^2 x + 12$$

$$= \frac{-10}{2} (1 - \cos 2x) + 12 = -5(1 - \cos 2x) + 12 = 5 \cos 2x + 7$$

**4) Formules de la tangente.**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que:  $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  on a

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  alors :  $\cos x \cdot \cos y \neq 0$

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$$

$$\text{Si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{On en déduit que : si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\text{Si } (x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$$

**Propriété 5:** Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ on a :}$$

$$1) \text{ Si } (x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors } \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y} \quad (1)$$

$$2) \text{ Si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ alors : } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (2)$$

$$3) \text{ Si } (x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ alors :}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y} \quad (3)$$

**Applications :** Calculer  $\tan \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{5\pi}{12}$

**Solution :**

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

**Exercice6 :** Calculer  $\tan \frac{11\pi}{12}$

**Exercice7 :**

1- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire  $\tan \left( \frac{\pi}{8} \right)$

**Solution :** 1) utiliser le déterminant  $\Delta$

2) utiliser :  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$  (2) on remplaçant :  $x = \frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométriques en fonction de :

$$t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$$

1) D'après Propriété 5 (2) et si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

et  $x \neq \pi + 2k\pi$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{On posant : } t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$$

on en déduit :  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

2) D'après Propriété 4 (1) on a :  $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$

et on sait :  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

par suite :  $\cos x = \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} - 1$

si  $x \neq \pi + 2k\pi$  alors : on peut conclure que :

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

On posant  $t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$  on en déduit :  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

D'après Propriété 4 (3) on a :  $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

si  $x \neq \pi + 2k\pi$

Alors on peut conclure que :  $\sin x = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$

d'où :  $\sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$  On posant :  $t = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$  on

en déduit :  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

**Propriété 6:** Soit  $x$  un réel tel que :  $x \neq \pi + 2k\pi$  on a :

1)  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  (1)

2)  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  (2)

Si de  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  et  $x \neq \pi + 2k\pi$

3)  $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$  (3)

**Application:** soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que :  $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$

Calculer  $\cos a$  et  $\sin a$  et  $\tan a$

**Solution :** on a  $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan a = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$$

**Exercice8 :1-** Montrer que  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :

$$(E): 2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$$

a) Vérifier que  $\pi + 2k\pi$  n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant :  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , résoudre l'équation (E)

(remarquer que  $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$ )

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

### 6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y$$

Si on pose :  $x-y = p$  et  $x+y = q$  alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

On peut conclure que :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la propriété 1 et de (1)-(2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = -2\sin x \cdot \sin y$$

Si on pose :  $x-y = p$  et  $x+y = q$  alors on peut

$$\text{déduire : } x = \frac{p+q}{2} \text{ et } y = \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

**Propriété 7:** Pour tous réels  $p, q$ , on a :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

**Application :** Transformer en produits les expressions suivantes :

$$1) A(x) = \sin 2x + \sin 4x$$

$$2) B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

**Solution :1)**

$$A(x) = \sin 2x + \sin 4x = 2\sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$$

$$\sin 2x + \sin 4x = 2\sin 3x \cos(-2x) = 2\sin 3x \cos 2x$$

2) on a :

$$\cos x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cos 2x \cos x$$

$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right) = 2\cos 3x \cos x$$

$$\text{Donc : } B(x) = 2\cos 2x \cos x + 2\cos 3x \cos x = 2\cos x (\cos 2x + \cos 3x)$$

$$\text{Et on a : } \cos 2x + \cos 3x = 2\cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

$$\text{Donc : } B(x) = 4\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2}$$

**Exercice9 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

### 8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+ (2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cdot \cos y \text{ d'où :}$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

**Propriété :** Pour tous réels  $x, y$  on a :

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

**La linéarisation** d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

**Application :** écrire sous la forme d'une somme

$$1) \cos 2x \times \sin 4x \quad 2) \sin x \times \sin 3x \quad 3) \cos 4x \times \cos 6x$$

**Solution :**

$$1) \cos 2x \times \sin 4x = \frac{1}{2} (\sin(2x+4x) - \sin(2x-4x)) = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin(-2x))$$

$$= \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x) = \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$2) \sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos(x+3x) - \cos(x-3x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\sin x \times \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(2x)) = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$3) \cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} (\cos(4x+6x) + \cos(4x-6x)) = \frac{1}{2} (\cos 4x - \cos(-2x))$$

$$\cos 4x \times \cos 6x = \frac{1}{2} \cos 4x - \frac{1}{2} \cos(2x)$$

**Exercice10 :** calculer

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} \quad 2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$$

**Solution :**

$$1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \cos \pi + \cos \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$$

$$2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \left( \frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left( \frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right)$$

$$\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{2} \left( \sin \pi + \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

**Exercice11 :** Montrer que

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = -2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)$$

$$3) \text{ en d\u00e9duire que: } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = -\frac{\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

**Solution :**

$$1) \sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( -\frac{2\pi}{11} \right) = 2 \sin \frac{5\pi}{11} \cos \frac{2\pi}{11}$$

$$2) \sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left( \frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2} \right)$$

$$\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11} = 2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( -\frac{2\pi}{11} \right) = -2 \cos \frac{5\pi}{11} \sin \frac{2\pi}{11}$$

$$3) \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{3\pi}{11} - \sin \frac{7\pi}{11}} = \frac{2 \sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)}{-2 \cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

$$= -\frac{\sin \left( \frac{5\pi}{11} \right) \cos \left( \frac{2\pi}{11} \right)}{\cos \left( \frac{5\pi}{11} \right) \sin \left( \frac{2\pi}{11} \right)} = -\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right) \times \frac{1}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)} = -\frac{\tan \left( \frac{5\pi}{11} \right)}{\tan \left( \frac{2\pi}{11} \right)}$$

**Exercice12 :** Montrer que  $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \times \tan x$

**Solution :** on a :

$$\cos 2x - \cos 4x = -2 \sin \left( \frac{2x+4x}{2} \right) \sin \left( \frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \sin(3x) \sin x$$

$$\text{et } \cos 2x + \cos 4x = -2 \cos \left( \frac{2x+4x}{2} \right) \cos \left( \frac{2x-4x}{2} \right) = 2 \cos 3x \cos x$$

$$\text{donc : } \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x \sin x}{2 \cos 3x \cos x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan 3x \times \tan x$$

car :  $\cos(-x) = \cos x$  et  $\sin(-x) = -\sin x$

**Exercice 13:** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = -\sin 4x \times \sin x$$

**Solution :**

$$\cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = \left( \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \right) \left( \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \left( \frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \cos \left( \frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = 2 \cos(2x) \cos \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{3x}{2} = -2 \sin \left( \frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2} \right) \sin \left( \frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2} \right) = -2 \sin(2x) \sin \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos^2 \frac{5x}{2} - \cos^2 \frac{3x}{2} = 2 \cos(2x) \cos \left( \frac{x}{2} \right) \times -2 \sin(2x) \sin \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$= -2 \cos(2x) \times \sin(2x) 2 \cos \left( \frac{x}{2} \right) \sin \left( \frac{x}{2} \right) = -\sin(4x) \sin x$$

**Exercice 14:** Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin 3x = \sin x \times (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) \cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^2 x - \cos x)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x)$$

**Solution :1)**  $\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$$= 2 \sin x \cos^2 x + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x = 2 \sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2 \sin^2 x) \sin x$$

$$= 2 \sin x - 2 \sin^3 x + \sin x - 2 \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x)$$

$$2) \cos 3x = \cos(2x+x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x$$

$$= \cos x (2 \cos^2 x - 1) + \sin x \times 2 \cos x \sin x = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x \sin^2 x$$

$$= 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x (1 - \cos^2 x) = 2 \cos^3 x - \cos x - 2 \cos x + 2 \cos^3 x$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos x (4 \cos^2 x - 3)$$

$$3) \cos(4x) = \cos(2 \times 2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2(2 \cos^2 x - 1)^2 - 1$$

$$= 2(4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1) - 1 = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$4) \sin(4x) = 4 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$$

$$\sin(4x) = \sin(2 \times 2x) = 2 \sin 2x \cos 2x = 2 \times 2 \sin x \cos x (2 \cos^2 x - 1)$$

$$5) \cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) \quad \text{??}$$

Methode1:

$$\frac{1}{4} (3 \cos x + \cos 3x) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos(x+2x)) = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x)$$

$$= \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos x (2 \cos^2 x - 1) - 2 \sin x \sin x \cos x)$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x + 3\cos x) = \frac{1}{4}(4\cos^3 x) = \cos^3 x$$

Methode2:  $\cos^3 x = \cos^2 x \times \cos x = \frac{1+\cos 2x}{2} \times \cos x = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 2x \times \cos x)$

$$\cos^3 x = \frac{1}{2}\left(\cos x + \frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x)\right) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$$

**Exercice 15:**  $P(x) = \sin 2x - \sin x$  et  $Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x$

Montrer que :  $P(x) = \sin x(2\cos x - 1)$  et

$$Q(x) = \cos x(2\cos x + 1)$$

**Solution :**

$$Q(x) = 1 + \cos x + \cos 2x = 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 = \cos x + 2\cos^2 x = \cos x(1 + 2\cos x)$$

$$P(x) = \sin 2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$$

**Exercices 16:**

1- Linéariser :  $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser :  $\cos^3 x$

### III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

#### 1) Rappelles

##### 1.1 $\cos x = a$

**Propriété :** Considérons l'équation (E)  $\cos x = a$  où  $a$  est un réel :

1) si  $a < -1$  ou  $a > 1$  alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation  $\cos x = 1$  sont les réels  $2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

3) les solutions de l'équation  $\cos x = -1$  sont les réels  $\pi + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

4) Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un seul réel  $\alpha$  dans  $]0, \pi[$  qui vérifie  $\cos \alpha = a$  et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation  $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$  sont les solutions des équations  $A(x) = B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $A(x) = -B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

**Exercices17 :** 1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$

##### 1.2 $\sin x = a$

**Propriété :**

Considérons l'équation (E')  $\sin x = a$  où  $a$  est un réel :

1) si  $a < -1$  ou  $a > 1$  alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.

2) les solutions de l'équation  $\sin x = 1$  sont les réels :

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

3) les solutions de l'équation  $\sin x = -1$  sont les réels-

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

4) Si  $-1 < a < 1$  alors il existe un seul réel  $\alpha$  dans

$$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ qui vérifie } \sin \alpha = a \text{ et l'ensemble des}$$

solutions de l'équation (E') sera :

$$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

5) En générale : les réels qui vérifient l'équation  $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$  sont les solutions des équations :  $A(x) = B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$  Ou  $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

**Exercices18 :**

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Déterminer les solutions dans l'intervalle  $]-\pi, \pi]$

##### 1.3 $\tan x = a$

**Propriété :** Pour tout réel  $a$ , il existe un et un seul réel

$$\alpha \text{ dans l'intervalle } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \text{ qui vérifie } \tan \alpha = a,$$

et l'équation  $\tan x = a$  aura comme ensemble de solutions  $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi ; k \in \mathbb{Z}\}.$

En général l'équation :  $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$  est définie pour les réel  $x$  tels que :

$$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et } B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ et a pour solution}$$

l'ensemble des réels  $x$  solution de l'équation :

$$A(x) = B(x) + k\pi$$

**Exercices19 :**

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  , l'équation  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  , l'équation  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

**Exercices20 :1)** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations

suivantes :  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'équations suivantes :

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3) Résoudre dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  l'équation suivante :

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

**Solution :** 1) on a  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ssi

$$2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$\text{Ssi } 2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ Ssi}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$2) \text{ on a } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \text{ ssi}$$

$$2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$$

$$\text{ssi } 3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\text{Donc } x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

- Encadrement de  $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1 \quad \text{donc } -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36} \text{ Donc}$$

$$-0,29 \leq k \leq 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ Donc } k=0 \text{ ou } k=1$$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_1 = \frac{7\pi}{36}$$

$$\text{Pour } k=1 \text{ on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$$

- Encadrement de  $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1 \quad \text{Donc } -\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24} \text{ Donc}$$

$$-0,54 \leq k \leq 0,04 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k \text{ n'existe pas}$$

- Donc  $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36}; \frac{31\pi}{36}\right\}$

$$3) \text{ on a } \tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1 \text{ est définie ssi}$$

$$2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ssi } 2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$$

$$\text{ssi } 2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi \text{ ssi } x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \text{ Donc}$$

$$D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{or on sait que : } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ Donc}$$

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Donc } 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ssi } 2x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{5} + k\pi \text{ ssi}$$

$$2x = \frac{9\pi}{20} + k\pi \text{ ssi } x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Encadrement de } \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ donc}$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ donc } -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$$

$$\text{donc } -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40} \text{ donc } -\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20} \text{ Donc}$$

$$-1,45 \leq k \leq 0,55 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ donc } k=0 \text{ ou } k=-1$$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_1 = \frac{9\pi}{40}$$

$$\text{Pour } k=-1 \text{ on trouve } x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40}$$

$$\text{Donc } S = \left\{-\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40}\right\}$$

2) L'équation : (E):  $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Si  $abc = 0$  l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de  $a \cos x + b \sin x$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls on a :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$\text{Or : } \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

donc : Il existe un réel  $\varphi$  tel que :

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Par suite :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x)$$

et d'après la formule d'addition

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

## 2.2 L'équation : (E): $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels non nuls :

$$a \cos x + b \sin x + c = 0 \Leftrightarrow a \cos x + b \sin x = -c$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) = -c$$

$$\text{où } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

**Propriété :** Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :

$(a, b) \neq (0, 0)$  on a pour tout réel  $x$  :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \text{ où le réel } \varphi \text{ est}$$

$$\text{déterminer par : } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

L'équation  $a \cos x + b \sin x + c = 0$  se ramène à :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Exemple1 :**  $\cos x - \sin x$   $a=1$  et  $b=-1$

$$\text{calculons : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + x \right)$$

**Exemple2 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

**Solution :** Transformation de :  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$$b=1 \text{ et } a=\sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{3}$$

$$\cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow 2 \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } S = \left\{ 0; \frac{\pi}{3}; 2\pi \right\}$$

**Exercices21 :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$$

## IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

### 1) Rappelles

#### 1.1) Inéquations avec cos

**Exemple :** Considérons l'inéquation  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

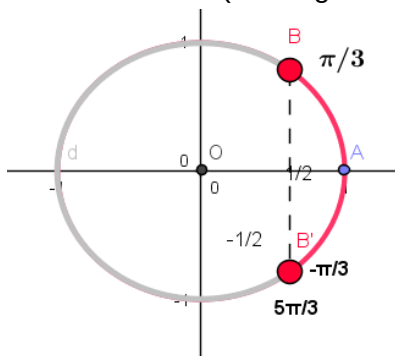
Tout d'abord il faut résoudre l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$

les images des solutions de cette équation sont :

$M(\frac{\pi}{3})$  et  $M'(-\frac{\pi}{3})$  et on constate que les réels qui

vérifient l'inéquation  $\cos x \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc  $M'M$  (en rouge sur la figure)



et par suite on peut conclure que  $S_{[-\pi, \pi]} = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$

les solutions dans  $[0, 2\pi]$  sont :

$$S_{[0, 2\pi]} = [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$$

**Exercices22 :** Résoudre dans  $[0, 3\pi]$  l'inéquation :

$$2 \cos x + \sqrt{3} \leq 0$$

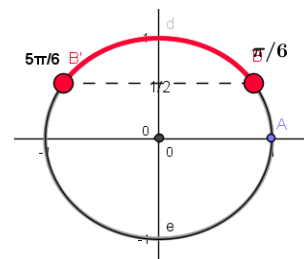
#### 1.2) Inéquations avec sin

**Exemple :** Résoudre dans  $[0, 2\pi]$  l'inéquation

$$\text{suivante : } \sin x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc } S = \left[ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$$



#### 1.3) Inéquation avec tan

**Exemple1 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation

$$\text{suivante : } \tan x - 1 \geq 0$$

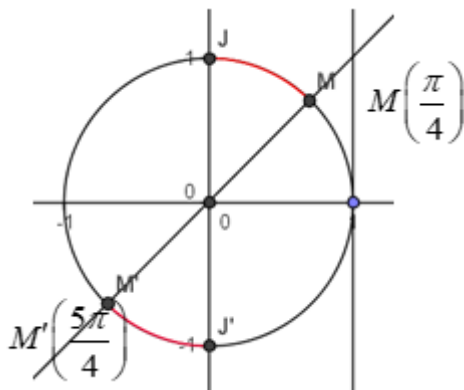
$$\text{On a } \tan x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq 1$$

On sait que :  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$  Les arc  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge

correspond a tous les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie

$\tan x - 1 \geq 0$  Donc

$$S = \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$$



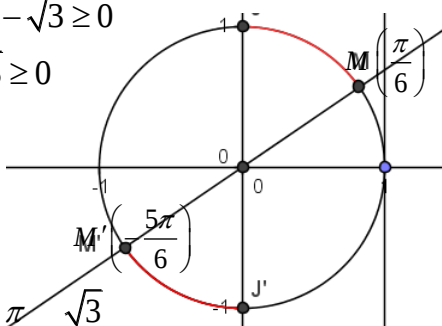
**Exemple2 :** Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation

suivante :  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$

ssi  $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que :  $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Les arc  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge correspond a tous

les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie  $3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$  Donc

$$S = \left[ -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right]$$

**Exercices23 :** 1) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'équation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$$

2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

**Solution :** Transformation de :  $\sqrt{3} \cos x + \sin x$

$b = -1$  et  $a = \sqrt{3}$

$$\text{Donc : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

• Encadrement de  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  :

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \quad \text{et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{2}$$

• Encadrement de  $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$$

$$\text{Donc } -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$$

$$\text{Donc } -\frac{7}{6} \leq 2k \leq \frac{5}{6} \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on trouve } x_2 = \frac{\pi}{6}$$

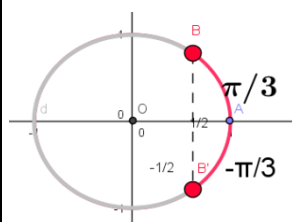
$$\text{Donc } S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

2) Résoudre dans  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation :

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1 \Leftrightarrow 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \geq 1 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{On pose : } X = x + \frac{\pi}{6} \text{ donc } \cos X \geq \frac{1}{2}$$



$$\cos X \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$S_{[-\pi; \pi]} = \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right]$$

**Exercices 24 : 1)** a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivantes :  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$  et en déduire les solutions dans  $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$$

**2)** Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation suivante :

$$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$$

**solution: 1)** a) on pose  $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme  $2t^2 - 9t - 5$  :

Calcul du discriminant :  $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont :  $t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$  et

$$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc l'équation  $\sin x = 5$  n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou}$$

$$x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Encadrement de  $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \text{ Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \text{ Donc}$$

$$0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k = 1$

Pour  $k = 1$  on remplace on trouve

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

• Encadrement de  $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$

et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \text{ Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \text{ Donc}$$

$$-0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k = 0$  on remplace on trouve  $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

**1) b)**  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$  ssi

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$

Donc  $\sin x - 5 < 0$

Puisque  $\sin x - 5 < 0$  et  $2 > 0$  alors

$$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0 \text{ ssi } \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{ssi } \sin x \geq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond a tous les points  $M(x)$

tq  $x$  vérifie  $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{donc } S = \left[ 0; \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6}; 2\pi \right]$$

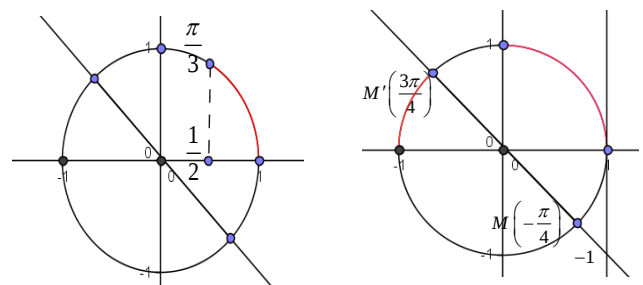
**2)** l'inéquation  $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$  est définie

$$\text{dans } [0; \pi] \text{ ssi } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$2\cos x - 1 \geq 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x + 1 \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq -1 \text{ ssi } \tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$



| $x$                         | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|-----------------------------|---|-----------------|-----------------|------------------|-------|
| $2\cos x - 1$               | + | 0               | -               | -                | -     |
| $\tan x + 1$                | + | +               | -               | 0                | +     |
| $(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$ | + | -               | -               | +                | -     |

$$\text{donc } S = \left[ 0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$

### Exercice25 :

1. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$$

2. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :

$$4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

3. Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :  $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$

### Exercice26 :

Résoudre dans  $[-\frac{11\pi}{5}, \frac{14\pi}{5}]$  l'équation  $\sin 3x \geq \frac{1}{2}$

Exercice27 :: soit  $x \in \mathbb{R}$  on pose :

$$A(x) = \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

1) calculer  $\cos 3x$  en fonction de  $\cos x$

Et calculer  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  en fonction de  $\cos x$  et  $\sin x$

2) en déduire une écriture simple de  $A(x)$

3)a) Résoudre dans  $I = [-\pi, \pi]$  l'équation:  $A(x) = \frac{1}{2}$

3)b) Résoudre dans  $I$  l'inéquation:  $A(x) \leq \frac{1}{2}$

### Solution : 1)

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos(2x + x) = \cos x \cos 2x - \sin 2x \sin x \\ &= \cos x(2\cos^2 x - 1) + \sin x \times 2\cos x \sin x = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x \sin^2 x \\ &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) = 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x = \cos x(4\cos^2 x - 3) \end{aligned}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x)$$

$$\begin{aligned} 2) A(x) &= \cos 3x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 3(\sin x + \cos x) = 4\cos^3 x \end{aligned}$$

$$3)a) A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\text{Car : } a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + \frac{1}{2}X + \frac{1}{4} = 0 \\ X = \cos x \end{cases}$$

Puisque :  $\Delta < 0$  alors cette équation n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$  donc :

$$A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

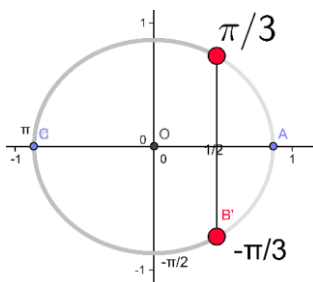
$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } S_{[-\pi, \pi]} = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$$

$$3)b) A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) \leq 0$$

$$\text{Puisque : } \Delta < 0 \text{ alors } \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} > 0$$

$$\text{Donc : } A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$



$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right]$$

Exercice28 : on pose :

$$A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

$$1) \text{ monter que : } \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

$$2) \text{ monter que : } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$3) \text{ en déduire que : } A = \frac{3}{16}$$

### Solution :

$$\text{On a : } \sin a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$1): \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{5\pi}{9} \right) - \cos \left( -\frac{3\pi}{9} \right) \right)$$

$$\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

$$\text{Donc : } \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

$$2) \text{ On a : } \cos a \times \sin b = -\frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$$

$$\cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{Donc : } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

3) déduction :  $A = \frac{3}{16}$  ?

$$A = \left( \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{\pi}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \cos \frac{5\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left( \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \sin \left( \pi - \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8} \left( \sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9} \right) = \frac{3}{16} \text{ Donc : } A = \frac{3}{16}$$

**Exercice 29:** soit :  $\theta \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$  tel que :  $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5$

1) monter que :  $5\sin \theta - 3\cos \theta = 3$

2) déduire la valeur de :  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$

**Solution :** 1)  $3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 - 5\cos \theta$

$$\Leftrightarrow 3\sin \theta = 5(1 - \cos \theta) \Leftrightarrow 3\sin \theta = 5 \times 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 3\sin \theta = 10 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 10 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{Car : } \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow 6 \cos \frac{\theta}{2} = 10 \sin \frac{\theta}{2} \text{ car } \sin \frac{\theta}{2} \neq 0$$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \Leftrightarrow \tan \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Or on sait que : } \sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} \text{ et } \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{Donc : } 3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{5 \left( 2 \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}} - \frac{3 \left( 1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} \right)}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3\sin \theta + 5\cos \theta = \frac{10 \times \frac{3}{5}}{1 + \frac{9}{25}} - \frac{3 \left( 1 - \frac{9}{25} \right)}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{102}{34} = 3$$

2) on a le systeme:  $\begin{cases} 3\sin \theta + 5\cos \theta = 5 \\ 5\sin \theta - 3\cos \theta = 3 \end{cases}$  on le résolvant on

trouve:  $\cos \theta = \frac{8}{17}$  et  $\sin \theta = \frac{15}{17}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.  
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

