CALCUL TRIGONOMETRIQUE

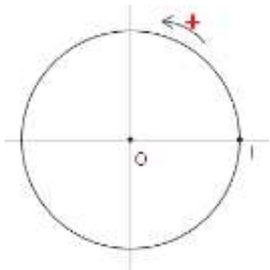
Formules de transformations

I) RAPPELLES

1) Cercle trigonométrique

Définition:

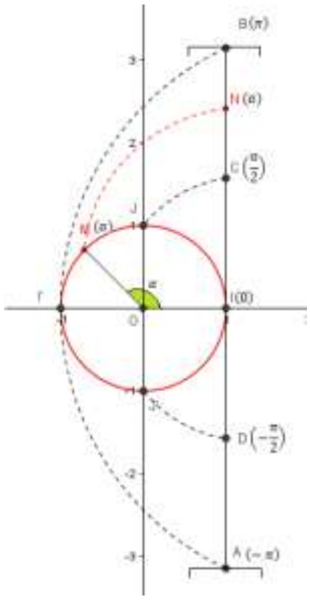
Le cercle trigonométrique est un cercle:



- de centre O l'origine du plan
- de rayon $R = 1$
- orienté une orientation positive.
- et admet une origine I

2) Les abscisses curvilignes

1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le C.T



Soit $(\mathcal{C})$ le cercle trigonométrique d'origine I; considérons l'intervalle $]-\pi,\pi]$

tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI). Si on fait enrouler

le segment qui représente $]-\pi,\pi]$ au tour du cercle $(\mathcal{C})$ on remarque que

chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi,\pi]$ s'associe avec un point unique

M du cercle trigonométrique.

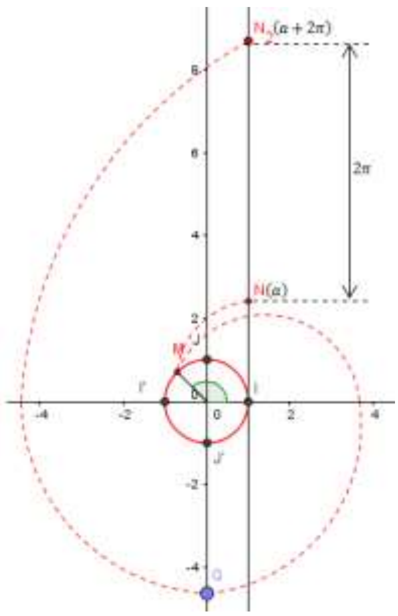
Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M

et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi,\pi]$, alors il existe un point M unique

de $(\mathcal{C})$ qui s'associe avec le point $N(\alpha)$.

Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique $[\widehat{IOM}]$.

1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique



Considérons le cercle trigonométrique $(\mathcal{C})$ d'origine I. (Δ) est la droite

passante par I et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ.

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α.

Si on suppose que la droite (Δ) est un file qu'on peut enrouler autour du cercle $(\mathcal{C})$

on remarque que la point M du cercle $(\mathcal{C})$ coïncide avec une infinité de points de

la droite (Δ); et qui ont pour abscisses

$\ldots\ldots(\alpha-6\pi),(\alpha-4\pi),(\alpha-2\pi),(\alpha),(\alpha+2\pi)\ldots\ldots$

En générale: chaque point N_k de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M

aura pour abscisse $\alpha + k\boldsymbol{2\pi}$

Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

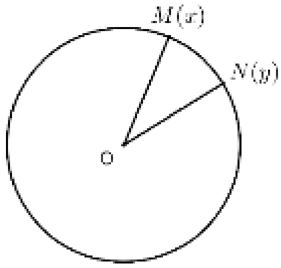
Définition :

Soit M un point sur le cercle $(\mathcal{C})$ et d'abscisse curviligne principale α. Les réels qui s'écrivent de la forme $\alpha + 2k\pi$ où **k est un entier relatif** s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle $(\mathcal{C})$.

II) TRANSFORMATION DE $\cos(x-y)$ ET CONSEQUENCES.

1) Formules de l'addition :

Exercice :



Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectifs x et y.

1- Calculer $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.

2- En déduire $\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

3- Calculer $\cos(x+y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

4- Calculer $\sin(x+y)$ et $\sin(x-y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y.

Propriété :

❶

Pour tous réels x et y on a :

$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$ (1)

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ (2)

$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$ (3)

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$ (4)

Applications :

Calculer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) Formules d'angle double.

D'après ❶ ligne (2) on a :

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$ et on sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$= 2\cos^2 x - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 x.$$

D'après ❶ ligne (3) on a :

$$\sin(2x) = 2\sin x.\cos y$$

Propriété :

❷

Pour tous réels x et y on a :

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ (1)

$= 1 - 2\sin^2 x$ (2)

$\sin(2x) = 2\sin x.\cos y$ (3)

3) Formules du demi-angle.

D'après ❷ ligne (1) et (2) on a :

Propriété :

❸

Pour tous réels x et y on a :

$$cos^2 x = \frac{1+cos(2x)}{2} \quad (1)$$

$$sin^2 x = \frac{1-cos(2x)}{2} \quad (2)$$

Application :

Calculer $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

D'après ❷

Propriété :

❹

$$cos(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (1)$$

$$= 1 - 2sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

$$sin(x) = 2sin\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

4) Formules du tangente.

Soient x et y deux réels tels que : $(x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

- $tan(x+y) = \frac{sin(x+y)}{cos(x+y)}$

  $= \frac{sinx.cosy+cosx.siny}{cosx.cosy-sinx.siny}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $cosx.cosy \neq 0$

  $= \frac{\frac{sinx.cosy}{cosx.cosy}+\frac{cosx.siny}{cosx.cosy}}{\frac{cosx.cosy}{cosx.cosy}-\frac{sinx.siny}{cosx.cosy}}$

  $= \frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$

- On en déduit que : si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2 x}$

- Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

  $tan(x-y) = \frac{tanx-tany}{1+tanx.tany}$

Propriété :

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

❺

- Si $(x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $tan(x+y) = \frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$ (1)
- Si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\left(\frac{\pi}{2}\right)$ alors : $tan(2x) = \frac{2tanx}{1-tan^2x}$ (2)
- Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $tan(x-y) = \frac{tanx-tany}{1+tanx.tany}$ (3)

Exercice :

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

➢ D'après ❺ (2) et si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

$tan(x) = \frac{2tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ On posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$

➢ D'après ❹ (1) on a : $cos(x) = 2cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ et on sait : $tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{cos^2\alpha}$

par suite :

$\cos(x) = \frac{2}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} - 1$ si $x \neq \pi + 2k\pi$ alors : on peut conclure que : $\cos(x) = \frac{1-tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

On posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

➢ D'après ❹ (3) on a : $sin(x) = 2sin\left(\frac{x}{2}\right).cos\left(\frac{x}{2}\right)$ si $x \neq \pi + 2k\pi$

alors on peut conclure que : $sin(x) = 2tan\left(\frac{x}{2}\right).cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

d'où : $sin(x) = \frac{2tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ On posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on en déduit : $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$

Propriété :

Soit x un réel tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ on a :

- $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)
- $sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ (2)

❻

Si de $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

- $tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Exercice :

1- Montrer que $tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$

2- Considérons l'équation :(E): $2cosx - 2sinx - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) en posant : $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$, résoudre l'équation (E) (remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$)

3- Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété ❶ et de (1)+(2) on peut conclure que : $cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.cosy$

Si on pose : $\begin{cases} x-y=p \\ x+y=q \end{cases}$ alors on peut déduire : $\begin{cases} x=\frac{p+q}{2} \\ y=\frac{p-q}{2} \end{cases}$

On peut conclure que : $cos\,p+cos\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la propriété ❶ et de (1)-(2) on peut conclure que : $cos(x-y)-cos(x+y)=-2sinx.siny$

Si on pose : $\begin{cases} x-y=p \\ x+y=q \end{cases}$ alors : $cos\,p-cos\,q=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

De la même façon on peut montrer les autres propriétés :

Propriété :

Pour tous réels $p\,,q$, on a :

$$sin\,p+sin\,q=2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$sin\,p-sin\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$cos\,p+cos\,q=2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$cos\,p-cos\,q=-2sin\left(\frac{p+q}{2}\right).sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

❼

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sinx+sin3x+sin5x+sin7x=0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété ❶ et de (1)+ (2) on peut conclure que : $cos(x-y)+cos(x+y)=2cosx.cosy$ d'où :

$cosx.cosy=\frac{1}{2}[cos(x-y)+cos(x+y)]$

De la même façon on peut montrer les autres égalités :

Propriété :

Pour tous réels x,y on a :

$$cosx.cosy=\frac{1}{2}[cos(x+y)+cos(x-y)]$$

$$sinx.siny=-\frac{1}{2}[cos(x+y)-cos(x-y)]$$

$$sinx.cosy=\frac{1}{2}[sin(x+y)+sin(x-y)]$$

❽

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Exercices :

1- Linéariser : $2cos^2x.sin(2x)$
2- Linéariser : cos^3x

III) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $cosx = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E) $\boldsymbol{cosx = a}$ où a est un réel :

- si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $cosx = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $cosx = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0, \pi[$ qui vérifie $cos\alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $cos(A(x)) = cos(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou}\left|\begin{array}{l} A(x) = B(x) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = -B(x) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercices :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$
   Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

1.2 $sin\ x = a$

Propriété :

Considérons l'équation (E') $\boldsymbol{sinx = a}$ où a est un réel :

- si $a < 1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.
- les solutions de l'équation $sinx = 1$ sont les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- les solutions de l'équation $sinx = -1$ sont les réels $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
- Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $sin\alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- En générale : les réels qui vérifient l'équation $sin(A(x)) = sin(B(x))$ sont les solutions des équations :

$$\text{ou}\left|\begin{array}{l} A(x) = B(x) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \\ A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Exercices :

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
   Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$

1.3 $tanx = a$

Propriété :

Pour tout réel a, il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $tan\alpha = a$,

et l'équation $\boldsymbol{tanx = a}$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que :

$A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $B(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution l'ensemble des réels x solution de l'équation :

$A(x) = B(x) + k\pi$

Exercices :

- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $cosx - \sqrt{3}sinx = 0$

2) L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Si $abc = 0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $acosx + bsinx$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}cosx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}sinx\right)$$

Or : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ donc :

Il existe un réel φ tel que :

$$\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

Par suite :

$acosx + bsinx = \sqrt{a^2 + b^2}\,(cos\varphi.cosx + sin\varphi.sinx)$ et d'après la formule d'addition

$$= \sqrt{a^2 + b^2}(cos(x - \varphi))$$

2.2 L'équation : (E): $acosx + bsinx + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls :

$$acosx + bsinx + c = 0 \Leftrightarrow acosx + bsinx = -c$$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2}(cos(x - \varphi)) = -c$ où : $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ça revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété :

Soient a et b deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$ on a :

Pour tout réel x : $acosx + bsinx = \sqrt{a^2+b^2}(cos(x-\varphi))$ où le réel φ est déterminer par : $\begin{cases} cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

L'équation $acosx + bsinx + c = 0$ se ramène à : $cos(x-\varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Application :

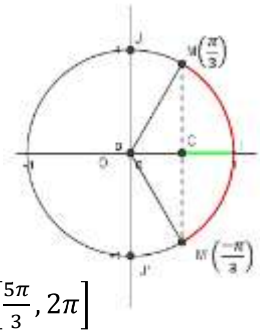
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{3}\,cos(3x) + sin(3x) + 2 = 0$

IV) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Rappelles

1.1) Inéquations avec cos

Considérons l'inéquation cosx $\geq \frac{1}{2}$.



Tout d'abord il faut résoudre l'équation cosx $= \frac{1}{2}$ les images des solutions de cette équation sont $M_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ et $M'_{\left(\frac{-\pi}{3}\right)}$ et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation cosx $\geq \frac{1}{2}$ sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc $[\widehat{M'IM}]$ (en rouge sur la figure)

et par suite on peut conclure que $S_{[-\pi,\pi]} = [\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ les solutions dans $[0,2\pi]$ sont $S_{[0,2\pi]} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$

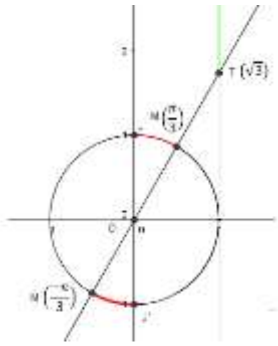
Exercice : Résoudre dans $[0,3\pi]$ l'inéquation $2cosx + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

En utilisant les démarches du paragraphe précèdent résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation $sinx \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$

puis déterminer les solution dans $[0,3\pi]$.

1.3) Inéquation avec tan



Pour résoudre l'inéquation (E_3) $tanx \geq \sqrt{3}$ on suit les étapes suivantes :

- Il faut remarquer que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\; ; k \in \mathbb{Z}$
- résoudre l'équation $tanx = \sqrt{3}$:
  l'ensemble de cette équation est $S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{3} + k\pi \,; k \in \mathbb{Z}\ \}$
- On place le point $M_{\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ sur le cercle trigonométrique.
- On trace la droite (OM)
- On détermine sur le cercle les arcs qui contient les points dont les abscisses curvilignes vérifient l'inéquation (E_3)

L'ensemble de solutions de l'inéquation (E_3) dans l'intervalle $[-\pi,\pi]$ est $S_{[-\pi,\pi]} = [\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{2}[\cup [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice : déterminer les solutions de (E_3) dans l'intervalle $[0,4\pi]$.

Exercice : Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ puis dans $[0,3\pi]$ l'inéquation $tanx \leq -1$

1.4) Inéquations dont la solution se ramène à la résolution d'une inéquation usuelle.

1. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation $sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{-1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $4cos^2x-2(1+\sqrt{2})cosx+\sqrt{2}\leq 0$
3. Résoudre dans $[-\pi,\pi]$ l'inéquation : $\frac{1+tanx}{sin2x}\geq 0$

Exercice :

Résoudre dans $[\frac{-11\pi}{5},\frac{14\pi}{5}]$ l'équation $sin3x\geq\frac{1}{2}$