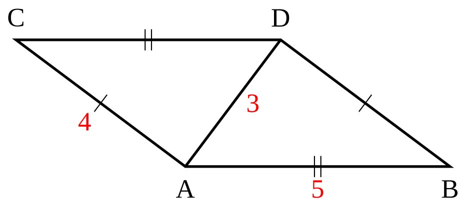
EXERCICES

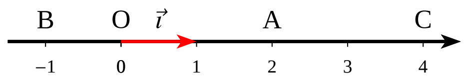
Série D'éxercices sur Le produit scalaire dans le plan

Sur les trois expressions du produit scalaire

EXERCICE 1

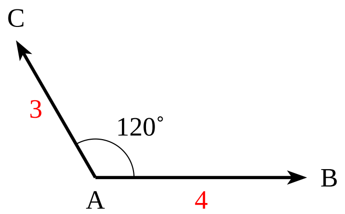
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 2 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :

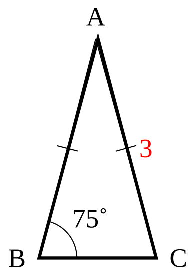


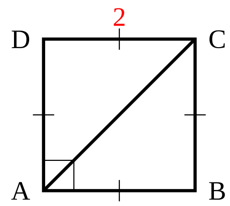


EXERCICE 2

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 3 figures en choisissant la définition la mieux adaptée :

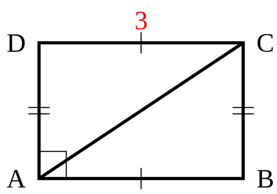


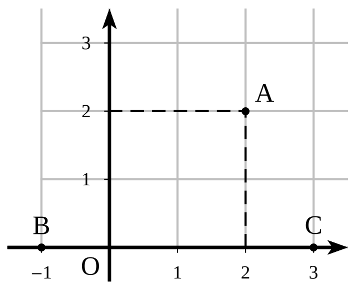




EXERCICE 3

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les figures suivantes en choisissant la définition la mieux adaptée :





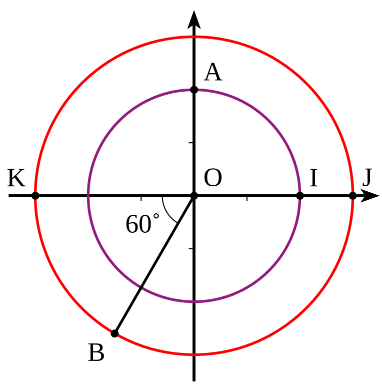
EXERCICE 4

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$



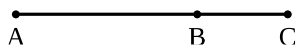
2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\frac{3}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

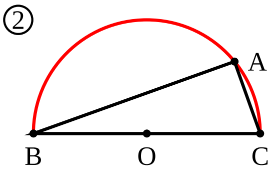
a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

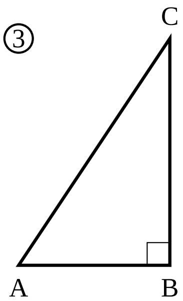
Exercice 5

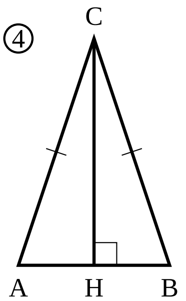
À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

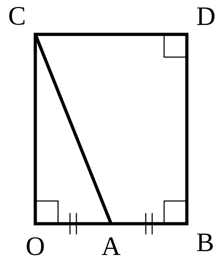
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$
c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}AB^2$
e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

①


②


③


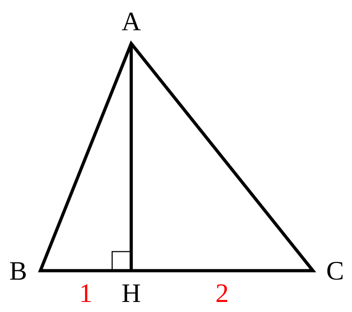
④


⑤


Exercice 6

Quel théorème permet d'affirmer :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6$$



Exercice 7

On donne trois points $A(4\,;\,1)$, $B(0\,;\,5)$ et $C(-2\,;\,-1)$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$.

Propriétés

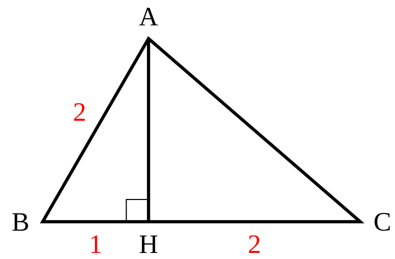
Exercice 8

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}$

c) $\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)$



Orthogonalité

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}(m\,;-2)$

b) $\vec{u}(m\,;\,3-m)$ et $\vec{v}(2\,;-m)$

c) $\vec{u}(m-4\,;\,2m+1)$ et $\vec{v}(2m\,;\,3-m)$

Exercice 10

On donne $A(-4\,;\,1)$, $B(-1\,;\,2)$ et $C(1\,;-4)$.

1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2) En déduire la nature du triangle ABC

Distance

Exercice 11

On donne les trois points $A(1\,;\,3)$, $B(-1\,;\,1)$ et $C(3\,;-2)$.

1) Calculer BC, puis $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$
2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).
   a) Pourquoi $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{BC}$?
   b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?
   c) En déduire BH et HC.

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB=4 \quad , \quad AD=2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD}=60^\circ$$

1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})^2=28$ et $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})^2=12$
2) En déduire les longueur AC et BD, et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

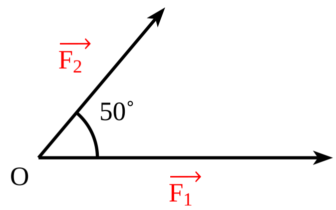
Application en physique

Exercice 13

Intensité de la résultante

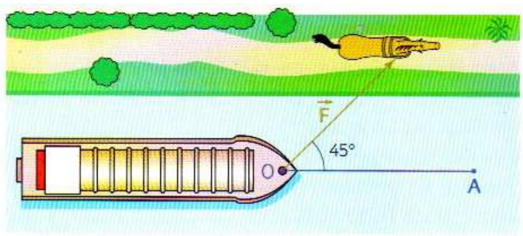
Soit un point O soumis à deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui forme un angle de 50 degré. Les intensités des deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ sont respectivement 300 N et 200 N. Par définition, la résultante des force est le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$

Calculer l'intensité de la résultante, à un newton près.



Travail d'une force

Pour tirer sur 50 m de O en A une péniche légère, un cheval, placé sur le chemin de halage exerce une force $\overrightarrow{F}$ d'intensité de 2 000 newtons selon une force de 45° avec la direction du déplacement.



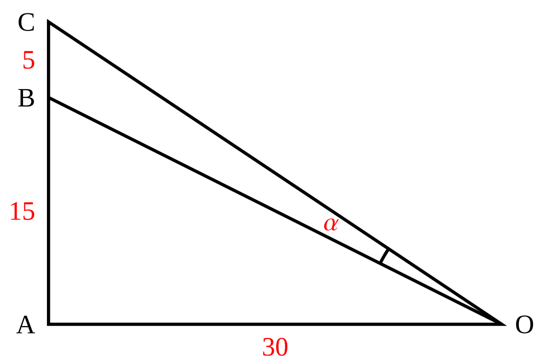
1) Quel est le travail W de la force ?
2) Si la péniche est tirée par un bateau, suivant l'axe du déplacement, quelle est l'intensité de la force qu'il faut exercer pour obtenir le même travail ?

Exercice 14

1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2) Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle α.



Droites et cercles

Exercice 15

d est la droite d'équation : $3x - y + 5 = 0$

1) Trouver un vecteur normal à d.
2) Trouver une équation de la droite Δ passant par A(1; 2) et perpendiculaire à d.

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

a) $d_1 \ : \ x - 2y + 4 = 0$ et $d_2 \ : \ 6x + 3y - 7 = 0$

b) $d_1 \;:\; y = 2x + 5$ et $d_2 \;:\; x - 2y + 1 = 0$

c) $d_1 \;:\; (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0$ et $d_2 \;:\; (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

Exercice 17

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

a) de centre $A(1\,;-2)$ et de rayon 5 ;

b) de centre $A(-1\,;\,2)$ et passant par $B(3\,;\,4)$

c) de centre $A(1\,;-4)$ et tangent à l'axe des abscisses

Exercice 18

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée est celle d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon :

a) $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$

b) $(x-2)(x+5) + (y-1)(y-4) = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$

Exercice 19

Soit les points $I(4\,;-1)$ et $A(1\,;\,5)$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I passant par A.
Démontrer que la droite d d"équation $y=\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$ est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$

Exercice 20

On donne le point $A(1\,;\,2)$ et la droite d d'équation $x + 2y = 0$.
Démontrer que le cercle de centre A passant par O est tangent à d.

Exercice 21

$\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+4y-2 = 0$ et d la droite d'équation $x+3y-6 = 0$

1) Faire une figure.

2) Vérifier les points $A(3\,;\,1)$ et $B(5\,;-1)$ appartiennent à $\mathscr{C}$

3) a) Le droite d est-elle tangente à $\mathscr{C}$ au point A ?

   b) Déterminer l'équation de la droite d' tangente à $\mathscr{C}$ en B.

Relations métriques dans un triangle

Exercice 22

ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

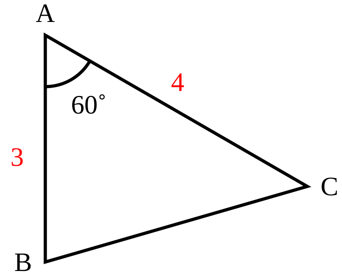
1) $AB = 8$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

2) $AB = 48$, $AC = 43$ et $BC = 35$.

Exercice 23

Dans la figure ci-contre, calculer :

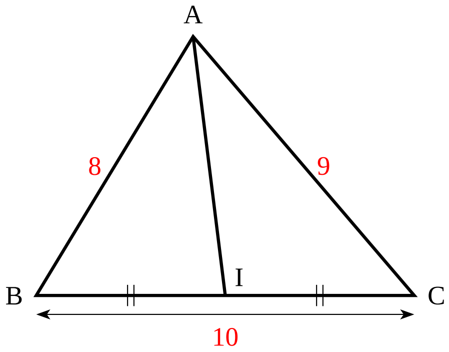
1) L'aire du triangle ABC.
2) Le périmètre du triangle ABC.



Exercice 24

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) La longueur de la médiane AI.
2) La longueur des deux autres médianes.



Exercice 25

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$

1) Calculer AC
2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

Exercice 26

ABC triangle tel que $AB=6$, $AC=4$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-12\sqrt{3}$. L'unité est le cm.

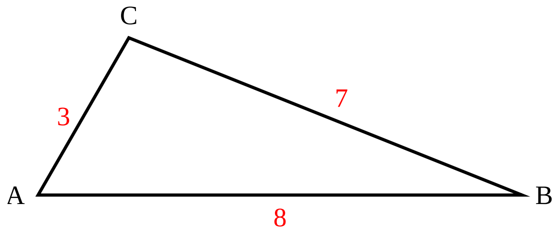
1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.
2) Trouver en cm^2, l'aire du triangle ABC.

Exercice 27

1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer $\cos\widehat{BAC}$

   b) En déduire $\sin\widehat{BAC}$

2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?



Exercice 28

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 7$ $AD = 3$ $AC = 8$

1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 3$

   b) En calculant $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos\widehat{BAD}$.

   En déduire que : $\sin\widehat{BAD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

2) a) Calculer l'aire du triangle BAD.

   b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

Trigonométrie

Exercice 29

1) Vérifier que : $\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

2) Vérifier que : $\dfrac{11\pi}{12} = \dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}$ puis calculer $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

Exercice 30

Calculer $\cos 2x$ dans chacun des cas suivants :

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ c) $\sin x = -\dfrac{1}{3}$

Exercice 31

Réduire les expressions suivantes :

a) $A(x) = \cos 7x \sin 6x - \sin 7x \cos 6x$

b) $B(x) = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x$

c) $C(x) = \cos 3x \sin 2x + \cos 2x \sin 3x$

Exercice 32

Exprimer chacune des expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

a) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ b) $\sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ c) $\sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 33

x est un réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a) Réduire l'écriture de l'expression : $\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x$

b) En déduire que : $\dfrac{\sin 3x}{\sin x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

Exercice 34

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \dfrac{3}{5}$ et $\sin b = \dfrac{1}{2}$

1) Calculer $\sin a$ et $\cos b$.

2) En déduire $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

EXERCICE 35

a et b sont deux réels de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin a = \frac{1}{2}$ et $\cos b = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

1) Calculer $\cos a$ et vérifier que $\sin b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2) a) Calculer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

   b) En déduire $(a+b)$ puis b.

EXERCICE 36

a est un réel de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\cos a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

1) Calculer $\cos 2a$

2) a) A quel intervalle appartient $2a$

   b) En déduire a, en justifiant votre réponse.

EXERCICE 37

a est un réel de l'intervalle $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{4}\right[$

1) a) Démontrer que : $(\cos a + \sin a)^2 = 1 + \sin 2a$

   b) En déduire que : $\frac{1+\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$

2) Sans calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{12}$, déduire de la question précédente que :

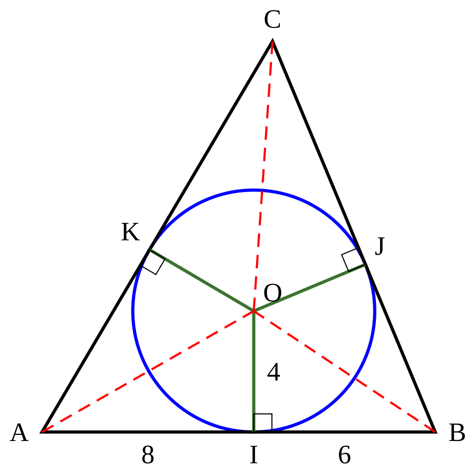
$$\frac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}} = 1+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

EXERCICE 38

Triangle et cercle inscrit

Comme l'indique la figure ci-contre, ABC est un triangle, le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 4 est le cercle inscrit tangent en I à (AB).

On a IA = 8 et IB = 6.



1) a) Calculer : $\sin\frac{\widehat{A}}{2}$ et $\cos\frac{\widehat{A}}{2}$

   b) Déduire que :

   $\sin\widehat{A} = \frac{4}{5}$ et $\cos\widehat{A} = \frac{3}{5}$.

2) De même, calculer $\sin\widehat{B}$ et $\cos\widehat{B}$.

3) a) Démontrer que : $\cos\widehat{C} = -\cos(\widehat{A}+\widehat{B})$ et $\sin\widehat{C} = \sin(\widehat{A}+\widehat{B})$

   b) En déduire $\cos\widehat{C}$ et $\sin\widehat{C}$