

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j})

Exercice 1.

On considère les points $A(-2, 0)$, $B(1, 1)$ et $C(-1, 3)$. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

1. Écrire $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de x et y .
2. Montrer que l'ensemble des points du plan tels que

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2$$

est une droite (D) à déterminer.

3. Montrer que $(D) \perp (BC)$.

Exercice 2.

On considère les deux vecteurs $\vec{u}(1, \sqrt{a})$ et $\vec{v}(a, 1)$ où $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $a + \sqrt{a} \leq \sqrt{1+a^2} \sqrt{1+a}$.
2. Dédire que $1 + \sqrt{a} \leq (1+a)(1+a^2)$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$,

$$x + y \leq (1+x^2)(1+y^2)$$

Exercice 3.

A et B deux points du plan tels que $AB = 3$, I le milieu de $[AB]$ et $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$

1. Soit (E) l'ensemble des points M tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$$

- (a) Montrer que $G \in (E)$.
- (b) Déterminer la nature de l'ensemble (E) .

2. Soit (F) l'ensemble des points M tels que

$$MA^2 - MB^2 = 8$$

- (a) Vérifier que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$
- (b) Dédire la nature de l'ensemble (F) .

Exercice 4.

On considère le cercle (C) défini par son équation cartésienne suivante :

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
2. Déterminer les équations cartésiennes des deux droites tangentes au cercle parallèles à la droite (D) d'équation $2x - y + 2 = 0$.

Exercice 5.

On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y - 3m - 4 = 0$$

tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m .
2. Déterminer (D) l'ensemble des centres des cercles quand m varie sur \mathbb{R} .

3. Montrer que tous ces cercles passent par deux points A et B fixes en les déterminant, puis vérifier que $(AB) \perp (D)$.
4. Trouver les cercles tangentes à la droite (Δ) d'équation $x + 2y + 2 = 0$.

Exercice 6.

On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2x - my = 0$$

tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m .
2. Montrer que le segment $[AB]$ tel que $A(2, 0)$ et $B(0, m)$ est un diamètre du cercle (C_m) .
3. Déterminer la valeur de m pour lequel la droite $(D) : y = -x$ soit tangente au cercle (C_m) .
4. On suppose que dans la suite que $m = 2$
 - (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_2) .
 - (b) Soit M un point du plan. I, J et K sont les projections orthogonales du point M sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite (AB) . Montrer que si I, J et K sont alignés alors $M \in (C_2)$.

Exercice 7.

On considère les points $A(1, 1)$, $B(2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $C(6, -4)$ et H la projection orthogonale du point B sur la droite (AC) .

1. (a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.
- (b) Dédire que $\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) Calculer la distance AH , puis déduire $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$.
- (b) Dédire les coordonnées du point H .

Exercice 8.

On considère dans le plan le cercle (C) d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .
2. On considère la droite $(D_m) : y = x + m$ avec $m \in \mathbb{R}$.
 - (a) Étudier l'intersection du cercle (C) et la droite (D_m) .
 - (b) Soit I_m le milieu du segment $[MM']$ tel que M et M' sont les points d'intersection du cercle (C) et la droite (D_m) .
 Trouver les coordonnées du point I_m , puis déterminer l'ensemble des points I_m quand m varie sur \mathbb{R} .