

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### Exercice 1.

On considère les points  $A(-2, 0)$ ,  $B(1, 1)$  et  $C(-1, 3)$ . Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

1. Écrire  $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC}$  en fonction de  $x$  et  $y$ .
2. Montrer que l'ensemble des points du plan tels que

$$\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2$$

est une droite  $(D)$  à déterminer.

3. Montrer que  $(D) \perp (BC)$ .

### Exercice 2.

On considère les deux vecteurs  $\vec{u}(1, \sqrt{a})$  et  $\vec{v}(a, 1)$  où  $a \in \mathbb{R}^+$ .

1. Montrer que  $a + \sqrt{a} \leq \sqrt{1 + a^2} \sqrt{1 + a}$ .
2. Déduire que  $1 + \sqrt{a} \leq (1 + a)(1 + a^2)$ .
3. Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$ ,

$$x + y \leq (1 + x^2)(1 + y^2)$$

### Exercice 3.

$A$  et  $B$  deux points du plan tels que  $AB = 3$ ,  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$

1. Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  tels que

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$$

- (a) Montrer que  $G \in (E)$ .
  - (b) Déterminer la nature de l'ensemble  $(E)$ .
2. Soit  $(F)$  l'ensemble des points  $M$  tels que

$$MA^2 - MB^2 = 8$$

- (a) Vérifier que  $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$
- (b) Déduire la nature de l'ensemble  $(F)$ .

### Exercice 4.

On considère le cercle  $(C)$  défini par son équation cartésienne suivante :

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C)$ .
2. Déterminer les équations cartésiennes des deux droites tangentes au cercle parallèles à la droite  $(D)$  d'équation  $2x - y + 2 = 0$ .

### Exercice 5.

On considère l'ensemble  $(C_m)$  défini par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y - 3m - 4 = 0$$

tel que  $m \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $(C_m)$  est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de  $m$ .
2. Déterminer  $(D)$  l'ensemble des centres des cercles quand  $m$  varie sur  $\mathbb{R}$ .

3. Montrer que tous ces cercles passent par deux points  $A$  et  $B$  fixes en les déterminant, puis vérifier que  $(AB) \perp (D)$ .
4. Trouver les cercles tangentes à la droite  $(\Delta)$  d'équation  $x + 2y + 2 = 0$ .

### Exercice 6.

On considère l'ensemble  $(C_m)$  définie par l'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 2x - my = 0$$

tel que  $m \in \mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $(C_m)$  est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de  $m$ .
2. Montrer que le segment  $[AB]$  tel que  $A(2, 0)$  et  $B(0, m)$  est un diamètre du cercle  $(C_m)$ .
3. Déterminer la valeur de  $m$  pour lequel la droite  $(D) : y = -x$  soit tangente au cercle  $(C_m)$ .
4. On suppose que dans la suite que  $m = 2$ 
  - (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C_2)$ .
  - (b) Soit  $M$  un point du plan.  $I, J$  et  $K$  sont les projections orthogonales du point  $M$  sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite  $(AB)$ . Montrer que si  $I, J$  et  $K$  sont alignés alors  $M \in (C_2)$ .

### Exercice 7.

On considère les points  $A(1, 1)$ ,  $B(2 + \sqrt{3}, \sqrt{3})$  et  $C(6, -4)$  et  $H$  la projection orthogonale du point  $B$  sur la droite  $(AC)$ .

1. (a) Déterminer une mesure de l'angle orienté  $(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AC}})$ .
- (b) Déduire que  $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) Calculer la distance  $AH$ , puis déduire  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$ .
- (b) Déduire les coordonnées du point  $H$ .

### Exercice 8.

On considère dans le plan le cercle  $(C)$  d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle  $(C)$ .
2. On considère la droite  $(D_m) : y = x + m$  avec  $m \in \mathbb{R}$ .
  - (a) Étudier l'intersection du cercle  $(C)$  et la droite  $(D_m)$ .
  - (b) Soit  $I_m$  le milieu du segment  $[MM']$  tel que  $M$  et  $M'$  sont les points d'intersection du cercle  $(C)$  et la droite  $(D_m)$ . Trouver les coordonnées du point  $I_m$ , puis déterminer l'ensemble des points  $I_m$  quand  $m$  varie sur  $\mathbb{R}$ .