

**PRODUIT SCALAIRE DANS  $V_2$  Etude analytique (1)**

**I) BASE ET REPERE ORTHONORMES**

Soit  $B(\vec{i}; \vec{j})$  une base de  $V_2$ .

- 1) La base  $B$  est dite **orthogonale** si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- 2) La base  $B$  est dite **normée** si  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- 3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.
- 4) Soit  $O$  un point du plan et Soit  $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$  un repère du plan ( $\mathcal{P}$ ); On dit que le repère  $\mathcal{R}$  est orthonormé si la base  $B(\vec{i}; \vec{j})$  associé à  $\mathcal{R}$  est orthonormée.

**II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.**

L'espace  $V_2$  est rapporté à une base orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$

Soient :  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs de  $V_2$

on a : 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  2)  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3)  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

4) Si  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  alors

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.**

**Théorème :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base

orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

**IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.**

**1) Vecteur normal sur une droite.**

Soit  $D(A; \vec{u})$  la droite passante par  $A$  et de vecteur

directeur  $\vec{u}$ ; tout vecteur  $\vec{n}$  non nul et orthogonal à  $\vec{u}$  s'appelle un vecteur normal sur la droite ( $D$ ).

**Remarque :** Si  $\vec{n}$  est normal sur une droite ( $D$ ); Tout Vecteur non nul colinéaire avec  $\vec{n}$  est aussi Normal sur la droite ( $D$ ).

Si ( $D$ ):  $ax + by + c = 0$  est une droite dans le plan alors  $\vec{u}(-b; a)$ , et le vecteur  $\vec{n}(a; b)$  normal sur la droite ( $D$ ).

**2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.**

**Propriété :** Soient  $A(x_A; y_A)$  un point donné, et  $\vec{n}(a; b)$  un vecteur non nul. La ( $D$ ) la droite qui passe par  $A$  et qui

admet  $\vec{n}$  comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

$$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

**Exemple :** déterminer une équation cartésienne de la droite ( $D$ ) qui passe par  $A(0; 1)$  et qui admet  $\vec{n}(2; 1)$  comme vecteur normal

**Solution :** on a ( $D$ ) qui passe  $A(0; 1)$  et  $\vec{n}(2; 1)$  un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite ( $D$ ) est :  $2(x - 0) + 1(y - 1) = 0$

donc : ( $D$ ) :  $2x + y - 1 = 0$

**3) Distance d'un point par rapport à une droite.**

**Définition :** Soient ( $D$ ) une droite et  $M_0$  un point dans le plan. La distance du point  $M_0$  à la droite ( $D$ ) est la distance  $M_0H$  où  $H$  est la projection orthogonal de  $M_0$  sur ( $D$ ). On la note :  $d(M_0; (D))$

**Remarque :** La distance d'un point  $M_0$  à une droite ( $D$ ) est la plus petite distance de  $M_0$  à un point  $M$  de ( $D$ )

**Théorème :** Soient la droite ( $D$ ):  $ax + by + c = 0$  et  $M_0(x_0; y_0)$  un point dans le plan.

La distance du point  $M_0$  à la droite ( $D$ ) est :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**V) L'inégalité de Cauchy-Schwarz et triangulaire.**

1) a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

2) a) Pour tout vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ . L'inégalité triangulaire.

b) l'égalité est vérifié si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens.

**Propriétés :** L'espace  $V_2$  est rapporté à une base

orthonormée  $B(\vec{i}; \vec{j})$  Soient  $\vec{u}(x; y)$  et  $\vec{v}(x'; y')$  on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

2) L'inégalité triangulaire.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

