PROF: ATMANI NAJIB

BARYCENTRES – EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.
Soit A et B deux points distincts. Dans chacun des cas suivants, justifier que le point G défini par l'égalité vectorielle donnée est le barycentre d'un système de points pondérés que l'on précisera

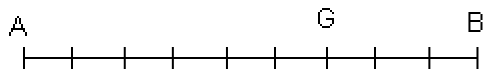
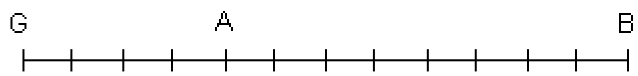
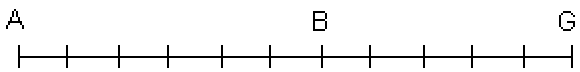
1) $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{GB}$ 3) $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$

Exercice n°2. Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer

Exercice n°3.
Soit A et B deux points distincts. Construire, s'ils existent, les barycentres des systèmes de points pondérés suivants.

1) $\{(A,-2);(B,5)\}$ 2) $\{(A,-3);(B,3)\}$ 3) $\left\{\left(A,\frac{2}{3}\right);\left(B,-\frac{1}{4}\right)\right\}$

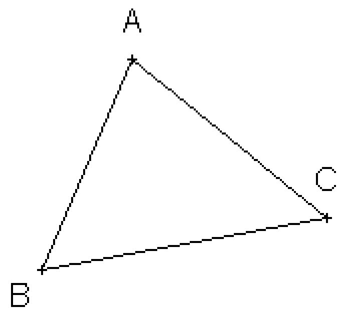
Exercice n°4. A partir de chaque figure, déterminer a et b pour que G soit le barycentre du système $\{(A,a);(B,b)\}$

1) 	2) 
3) 	

Exercice n°5.
Le triangle ABC étant donné ci-dessous, construire **le plus précisément possible** les deux barycentres donnés.

$G=Bar\{(A,4);(B,3);(C,-1)\}$

et $J=Bar\left\{\left(A,\frac{1}{6}\right);\left(B,-\frac{1}{12}\right);\left(C,\frac{1}{4}\right)\right\}$



Exercice n°6. Soit ABC est un triangle.
On définit les points H,K,L et G par :

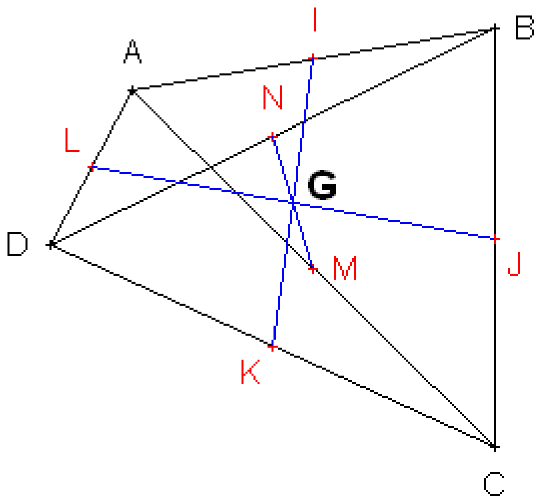
H est le barycentre du système $\{(A,3);(B,2)\}$ K est le barycentre du système $\{(B,2);(C,-1)\}$

L est le barycentre du système $\{(A,3);(C,-1)\}$ G est le barycentre du système $\{(H,5);(C,-1)\}$

1) Démontrer que : $3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
2) En déduire que :
a) G est le milieu du segment [BL]
b) G est le barycentre des points A et K affectés de coefficients que l'on déterminera

Exercice n°7.
On considère un triangle ABC, I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), J le barycentre des points pondérés (A,1),(B,2), K le barycentre des points pondérés (C,1),(B,-4).
1) Exprimer B comme le barycentre des points K et C avec des coefficients à déterminer.
2) Déterminez le barycentre de (A,2),(K,3),(C,1).
3) Démontrer que le point J est le milieu de [IK].
4) Soit L le milieu de [CI] et M celui de [KC]. Déterminez a,b,c,d réels pour que L soit le barycentre de (A,a),(C,b) et M celui de (B,c),(C,d).

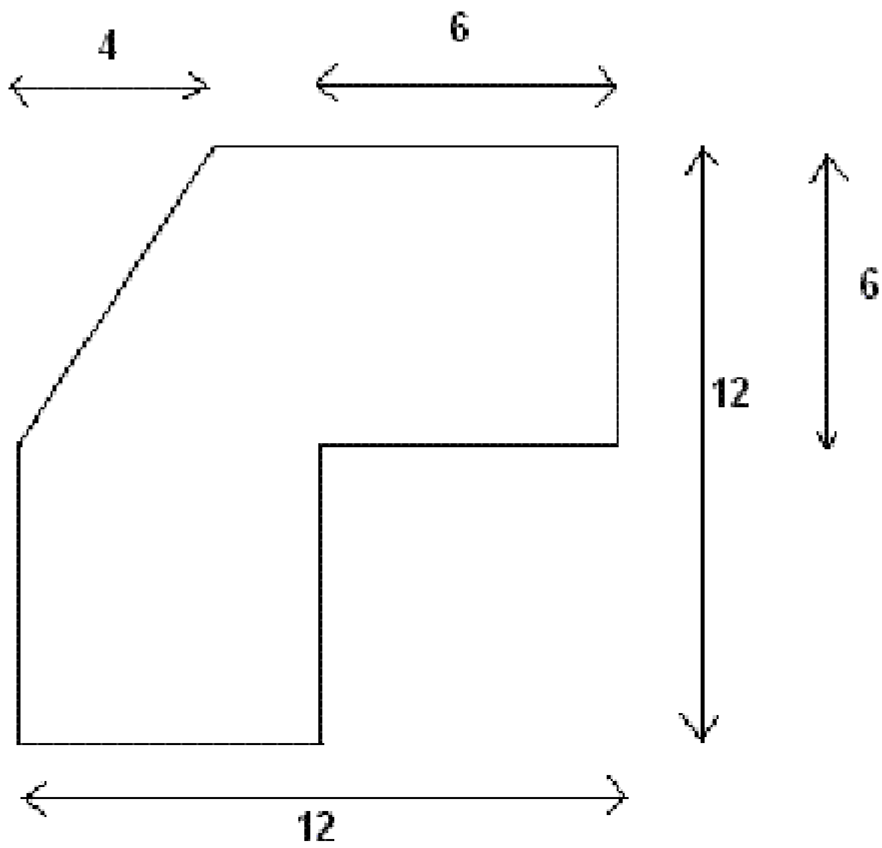
Exercice n°8.
Soit ABCD un quadrilatère.
On note I,J,K,L,M et N les milieux respectifs de [AB] , [BC] , [CD] , [DA], [AC] et [BD]
Soit G l'isobarycentre de ABCD.
Démontrer que G est le milieu de [IK], [MN] et [LJ].
Conclure



Exercice n°9.
ABCD est un rectangle tel que AB = 6
1) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}\right\|$
Démontrer que le milieu de [BC] appartient à Γ_1
2) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=2AB$
Démontrer que le point B appartient à Γ_2

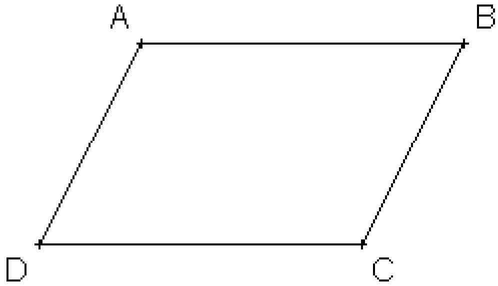
Exercice n°10.
Dans un repère orthonormé, on considère les points A(-1;2), B(3;1) et C(2;4).
Calculer les coordonnées du barycentre G du système (A;2), (B;-1) et (C;3)

Exercice n°11.
Déterminer et placer le centre d'inertie de la plaque ci-dessous, supposée homogène et d'épaisseur négligeable
On fera apparaître les traits de construction ainsi que les étapes intermédiaires



Exercices de synthèse :

Exercice n°12. Soient ABCD un parallélogramme et I le milieu de [AB]. Les droites (DB) et (CI) se coupent en un point noté G (La figure, à compléter, est donnée ci-dessous).



1) Montrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
2) a) Construire le barycentre K du système de points pondérés (A ; 1) , (B ; 1) et (C ; -1)
b) Montrer que K est aussi le barycentre du système de points pondérés (G ; 3) et (C ; -2)
3) a) Déduire de la relation (1) que A est le barycentre des points pondérés (D ; 1) , (G ; 3) et (C ; -2)
b) Montrer que A est le milieu du segment [DK]
4) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
$\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|$
5) a) Pour quelle(s) valeur(s) du réel m le barycentre I_m du système (D , m) , (G ; 3) et (C ; -2) existe-t-il ?
b) Lorsque I_m existe, montrer que : $\overrightarrow{DI_m}=\frac{1}{1+m}\overrightarrow{DK}$
c) Étudier les variations de la fonction $x\to\frac{1}{1+x}$ et dresser son tableau de variations (on précisera ses limites aux bornes de son domaine de définition sans justification).
d) En déduire le lieu géométrique du point I_m lorsque le réel décrit l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Exercice n°13.
Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.
1) Construire, en justifiant, le point G barycentre du système de points pondérés $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$
2) M est un point quelconque de (P). Montrer que le vecteur $\vec{V}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ est un vecteur de norme 8
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\vec{V}\right\|$
4) On considère le système de points pondérés $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
a) Montrer que le barycentre G_n de ce système, existe quelle que soit la valeur de n
b) Montrer que pour tout entier naturel n , G_n appartient à [AH]
c) Soit Γ_n l'ensemble des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}+n\overrightarrow{MC}\right\|=n\left\|\vec{V}\right\|$. Montrer que Γ_n est un cercle contenant le point A, dont on précisera le centre et le rayon
d) Déterminer la distance AG_n en fonction de n
5) Quel est le comportement de G_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice n°14.
Sur une droite D munie d'un repère $(O;\vec{i})$, A_0 et B_0 sont les points d'abscisses respectives –4 et 3. Pour tout entier naturel n, on note : A_{n+1} le barycentre de $(A_n,1)$ et $(B_n,4)$; B_{n+1} le barycentre de $(A_n,3)$ et $(B_n,2)$;
1) Placer les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1
2) Les points A_n et B_n ont pour abscisses respectives a_n et b_n . Ainsi $a_0=-4$ et $b_0=3$
Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{1}{5}(a_n+4b_n)$ et $b_{n+1}=\frac{1}{5}(3a_n+2b_n)$
3) a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n : $3a_n+4b_n=0$

b) En déduire que : $a_{n+1} = -\frac{2}{5}a_n$ et $b_{n+1} = -\frac{2}{5}b_n$

4) a) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

b) Déterminer les limites de a_n et b_n quand n tend vers $+\infty$

c) Interpréter ce résultat à l'aide des points A_n et B_n .