Lycée Jaâfar El-Fassi El-Fihri
1er-SMF
Pr. S. Lazaiz

Barycentre

Exercice 1. ABC est un triangle avec E le milieu de $[AB]$, F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que les droites (CE), (BF) et (AG) sont concourantes.

Exercice 2. ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. G est le centre de gravité de ABC.
Déterminer et construire (ζ) l'ensemble des points M dans chaque cas :

1. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$
2. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$
3. $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 3. Soient ABC un triangle et F le barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$. Soient D le milieu de $[AC]$ et G le barycentre de $\{(A,5),(B,2),(C,-3)\}$.

1. Montrer que F est le milieu de $[BD]$.
2. Montrer que le quadrilatère $ACFG$ est un parallélogramme.
3. E est le milieu de $[AB]$. Montrer que E, F et G sont alignés.
4. Vérifier que $EF = \frac{1}{4}AC$.

Exercice 4. $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points tels que $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB}$ et $(1-k)\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

1. Vérifier que C est un barycentre des points A, B et D en déterminant ses pondérations.
2. Montrer que C, E et F sont alignés.
3. Déterminer k pour que C soit le centre de $[EF]$.

Exercice 5. ABC un triangle. Soit E le barycentre de $(B,1)$ et $(C,-3)$ et soit F le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $(CF) \parallel (AE)$.

Exercice 6. On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$
   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A,1),(B,5),(C,-2)\}$
2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
   (b) Montrer que le barycentre I de $\{(B,2),(C,-1)\}$ appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
   (a) Déterminer trois réels α, β et γ tels que K soit barycentre de $\{(A,\alpha),(D,\beta),(C,\gamma)\}$
   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC). Déterminer les réels α' et γ' tels que X soit barycentre de $\{(A,\alpha'),(C,\gamma')\}$

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Le point I est le symétrique de B par rapport à C. Le point J est le symétrique de C par rapport à A. Le point K est le symétrique de A par rapport à B. On obtient un nouveau triangle IJK.

1. Démontrer que A est le barycentre de $\{(I,2),(J,4),(K,1)\}$.
   Exprimer de même sans calculs B et C comme barycentres de I, J, K.
2. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (BC), (AC), (AB) avec les droites (KJ), (IK), (JI).
   (a) Démontrer que R est le barycentre de $\{(I,1),(J,2)\}$.
   (b) Énoncer les résultats analogues pour les points P et Q.
3. On donne le triangle IJK. Retrouver le triangle ABC.

Exercice 8. ABC un triangle et I un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et construire I.
2. Soit D le barycentre de $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$, montrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et construire D.
3. (a) Construire les deux points E et F tels que $ACBE$ et $ADBF$ soient des parallélogramme.
   (b) Montrer que les points A, C et F sont alignés et que (EF) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9. On considère un parallélogramme $ABCD$ et J le milieu du coté $[AC]$.
I et I' deux points tels que $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Le point K est le quatrième point du parallélogramme $IAJK$. Soit M le barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ et $(C,3)$.

1. Exprimer comme barycentre de A, B et C chacun des points I, J et D.
2. Montrer les relations $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$. En déduire une écriture du point K comme barycentre des points A, B et C.
3. Montrer que les droites (BJ), (CI) et (DK) sont concourantes en M.
4. Montrer que les quatre points M, I', K et D sont alignés.