TD BARYCENTRE **Exercices avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC SM BIOF

TD BARYCENTRE AVEC CORRECTION

Exercice1 : Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

Solution : $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc :

$4\overrightarrow{AG}-5\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{AG}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G\in(AB)$

Exercice2 :

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

Solution :

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}}\times\sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}}\times(-\sqrt{2}))\}$

donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

donc : $2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{AG}-\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AG}\right)=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}$ Donc $G=B$

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$

et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Déterminer les coordonnées de G

Solution : on a : $\begin{cases} x_G=\dfrac{-x_A+5x_B}{4} \\ y_G=\dfrac{-y_A+5y_B}{4}\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_G=\dfrac{17}{4} \\ y_G=\dfrac{3}{4}\end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice4 : soit ABC un triangle et soit :

$I = Bar\ \{(B, 4); (C, -3)\}$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution : on a : donc $(4+(-3))\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI}=4\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ $I(4;-3)$

Exercice5 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF}$ et $E\notin(AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=2\left(\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{EG}+2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG}-2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$

$-\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=\vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G\in(EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G\in(AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice6 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

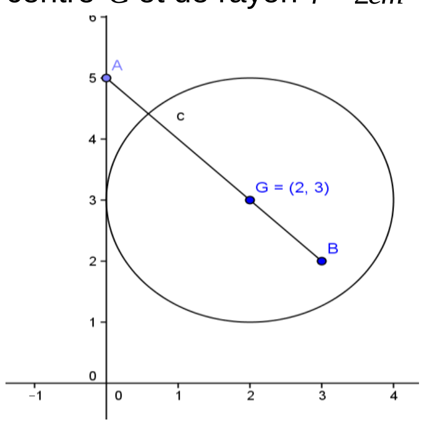
$(C)=\left\{M\in(P)/\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G=\dfrac{0+6}{3}=2 \\ y_G=\dfrac{5+4}{3}=3\end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|=6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=6cm$

$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=6cm \Leftrightarrow 3MG=6cm \Leftrightarrow MG=2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=2cm$

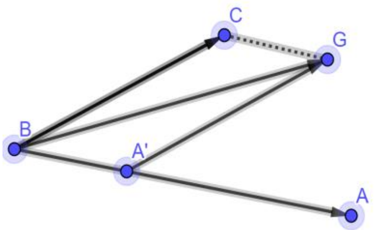


Exercice7 : soit ABC un triangle

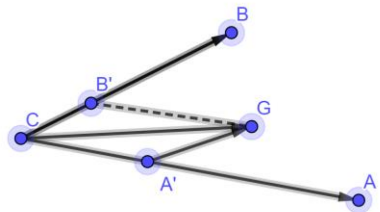
1)Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$

2)Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$

Solution : 1)
$G = Bar\{(A,\ 1);\ (B,\ -1)\ ;\ (C,\ 3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG} = 1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = B$ on aura :
$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$



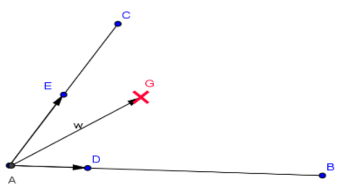
2) $G = Bar\{(A,\ 4);\ (B,\ 1/2)\ ;\ (C,\ -3)\}$
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = C$ on aura :
$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



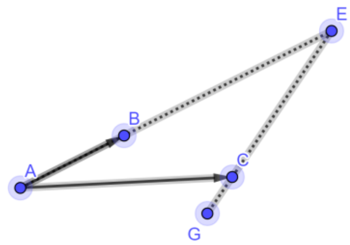
Exercice 8: Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$
1)montrer que G le barycentre de :
$\{(A,\ 1);\ (B,\ 1);\ (C,\ 2)\}$ et construire le point G
Solution : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Donc G le barycentre de : $\{(A,\ 1);\ (B,\ 1);\ (C,\ 2)\}$
On a :® $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$
Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$



Exercice 9 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A,\ 2);\ (B,\ -3);\ (C,\ 5)\}$
Solution : soit E = $Bar\{(A,\ 2);\ (B,\ -3)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$
On pose : $M = A$ on aura : $-\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$
d'après la Propriété d'associativité on a :
G = $Bar\{(E,\ -1);\ (C,\ 5)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = E$ on aura :
$4\overrightarrow{EG} = 5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Exercice 10 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$
Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
$\{(A,\ 1);\ (B,\ 1);\ (C,\ 1)\}$
I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : $\{(B,\ 1);\ (C,\ 1)\}$
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}
Exercice11 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose :$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2) soit K = $Bar\{(C,\ -3);\ (B,\ 1)\}$ montrer que :
$\vec{V} = 2\overrightarrow{KA}$
3) soit G= $Bar\{(A,\ 2);\ (B,\ -1);\ (C,\ -3)\}$
montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$
4) en déduire l'ensemble des points M tel que
$\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$
Solution : 1)
$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$
$\vec{V} = \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2)on a : $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M = K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = Bar {(C, -3); (B, 1)} donc : $\overrightarrow{KB}-3\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA}=\vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du

barycentre on a :

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\left(2+(-1)+(-3)\right)\overrightarrow{MG}=-2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{GM}\right\|=\left\|2\overrightarrow{KA}\right\| \Leftrightarrow 2GM=2KA \Leftrightarrow GM=KA$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r=KA$

Exercice 12 : Soit ABC un triangle tel que : $AC=6cm$ et $AB=5cm$ et $BC=4cm$

a) Construire G le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)}

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de : {(A, 1); (B, 2); (C, 1)} donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre

Donc G est le milieu du segment $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=AC \Leftrightarrow GM=\dfrac{AC}{4}=1.5$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r=1.5cm$

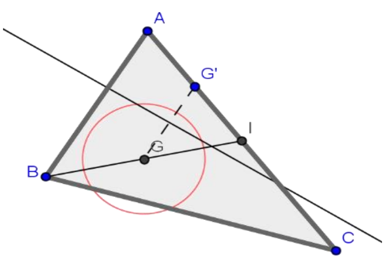
b) Soit G' est le barycentre de : {(A, 3); (C, 1)} Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M\in(P)$

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG'}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow 4MG=4MG'\Leftrightarrow MG=MG'$

Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$

Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



Exercice13 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit G = Bar {(A, 1); (B, 2)}

1)Déterminer les coordonnées de K = Bar {(A, 2); (B, 3)}

2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K=\dfrac{-2+0}{5}==\dfrac{-2}{5} \\ y_K=\dfrac{2+6}{5}=\dfrac{8}{5}\end{cases}$ donc $K\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :

$\begin{cases} x_L=\dfrac{1x_A+1x_B+1x_C}{1+1+1} \\ y_L=\dfrac{1y_A+1y_B+1y_C}{1+1+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L=\dfrac{1\times(-1)+1\times 0+1\times 1}{1+1+1}=0 \\ y_L=\dfrac{1\times 1+1\times 2+1\times(-1)}{1+1+1}=\dfrac{2}{3}\end{cases}$ Donc $L\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5}\end{cases}$

$G\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{7}{5}\right)$

Exercice14 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe

Soit H le barycentre du système pondéré {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }

Soit K le barycentre du système pondéré {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}

Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

1)Montrer que $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

b) en déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :

1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$\overrightarrow{ME}=\dfrac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut

Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système

Pondéré {(D, -6); (E, 4) }

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$$

Donc : $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MK}$

Donc : : $3\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{MH}-3\overrightarrow{MD}$

$3\overrightarrow{DH}=3\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MK}$

Donc : $(AK)\parallel(DH)$: Donc $3\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AK}$

Exercice15 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a)Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a)on a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc :

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times1-\frac{3}{2}\times0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times0-\frac{3}{2}\times1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$$

donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK): 15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

on a : $(IK): 15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

par suite : $J\in(IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice16 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• on a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K\in(IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice17: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$et$[CD]$et M et N deux points tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$De même on a :

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$ donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

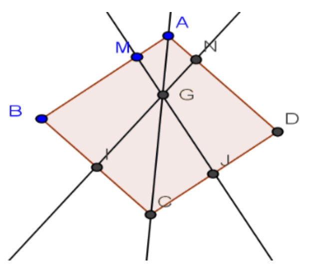
2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G\in(JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G\in(NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H\in[AC]$ donc $G\in(AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice18: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et soit :(F)l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1)montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M \in (F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} = 3 \Leftrightarrow MA = 3MB$

$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2)a)

$M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) = 0$

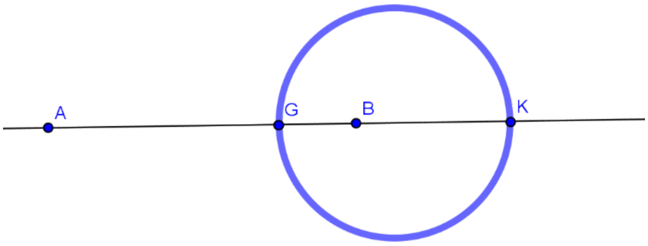
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MK} = 0$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice19: A et B deux points tel que : $AB = 4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)montrer que : $H \in (E)$

b)vérifier que : $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = 8$

a) Montrer que : $\forall M \in (P)$ on a : $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F) = (E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \bullet \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}) \bullet \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \bullet \overrightarrow{AB} = 0$

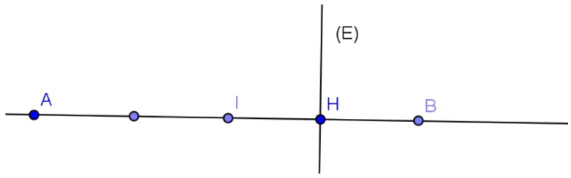
c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = 2\overrightarrow{IM} \bullet \overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b) $M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Exercice 20 : A et B deux points tel que : $AB = 3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;3)$

a)monter que : $M \in (C) \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2)soit :(C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = \frac{-5}{4}$

a)Montrer que : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= 2MI^2 + 2IA^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}) = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

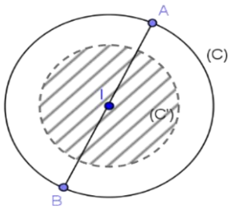
Car : $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} = \vec{0}$

$M \in (C) \Leftrightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = 9 \Leftrightarrow MI = \frac{3}{2}$

b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

Donc : $M \in (C') \Leftrightarrow MI = 1$



2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r = 1$

Exercice 21 : A A l'aide des barycentres, démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et retrouver la position du centre de gravité sur les médianes.

Solution : Notons ABC le triangle, A′ le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C′ le milieu de $[AB]$. Définissons finalement G l'isobarycentre de A , B et C . Alors, par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$. Ainsi, G est sur la droite (AA') . De même, G est sur la droite (BB') et G est sur la droite (CC') . Ainsi, les trois droites sont concourantes en G . De plus, puisque G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Exercice 22 :
Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB.

Solution Il suffit de remarquer que : $\overrightarrow{PB} = \frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$ et que $\overrightarrow{PA} = -\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}$

Ceci donne $PB \times \overrightarrow{PA} + PA \times \overrightarrow{PB} = \vec{0}$
Ainsi, P est le barycentre de (A,BP) et de (B,AP) .

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien