PROF: ATMANI NAJIB

BARYCENTRES - CORRECTION

Exercice n°1

1) L'égalité vectorielle $2\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,2);(B,3)\}$ (c'est la définition !)

2) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{GB}$ est équivalente à $\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,1);(B,5)\}$

3) L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}$ se transforme successivement en :

$$\overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\text{Relation de Chasles}}=\overrightarrow{GB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)-\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{5}\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{5}\overrightarrow{AG}-\frac{4}{5}\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow 5\left(\frac{6}{5}\overrightarrow{AG}-\frac{4}{5}\overrightarrow{GB}\right)=5\times\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG}-4\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(6\overrightarrow{AG}-4\overrightarrow{GB}\right)=\frac{1}{2}\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

qui traduit exactement le fait que G est le barycentre du système $\{(A,-3);(B,-2)\}$

Exercice n°2 Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire : $\overrightarrow{KC}-4\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{KB}=\vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$, qui traduit le fait que B est le barycentre du système $\{(K,3);(C,1)\}$

Exercice n°3 **1)** G barycentre de $\{(A,-2);(B,5)\}$ signifie que :

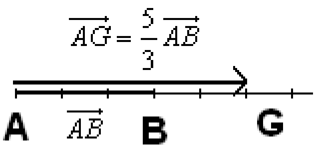
$$-2\overrightarrow{GA}+5\underbrace{\overrightarrow{GB}}_{\text{Relation de Chasles}}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA}+5\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}=-5\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$$

D'où une construction du point G :



2ème méthode :

Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ (avec $\alpha+\beta\neq 0$), alors $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, on peut écrire directement que G barycentre de $\{(A,-2);(B,5)\}$ signifie $\overrightarrow{AG}=\frac{5}{-2+5}\overrightarrow{AB}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ (on retrouve le même résultat !)

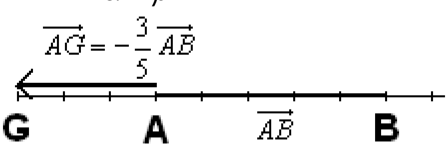
2) Dans le deuxième cas, la somme des coefficients étant nulle, le barycentre du système $\{(A,-3);(B,3)\}$ **n'existe pas**. Inutile dessayer de le construire !

3) Pour construire le barycentre du système de points pondérés $\left\{\left(A,\frac{2}{3}\right);\left(B,-\frac{1}{4}\right)\right\}$, on commence par multiplier les deux coefficients par 12 car l'égalité $\frac{2}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ est équivalente à $12\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{GA}-\frac{1}{4}\overrightarrow{GB}\right)=12\times\vec{0} \Leftrightarrow 8\overrightarrow{GA}-3\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

(De manière générale on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

Ceci supprime les fractions, et rend le calcul vectoriel ou l'application de la formule $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ plus aisée.

On trouve finalement $\overrightarrow{AG}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$, ce qui nous permet de construire le point G :



Exercice n°4

Figure 1 :

1ère méthode : Sur la figure 1) on « lit » que $\overrightarrow{AG}=\frac{6}{9}\overrightarrow{AB}$, égalité vectorielle que l'on transforme successivement en :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{6}{9}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}-2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow-\overrightarrow{GA}-2\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

qui traduit le fait que G est le barycentre du système $\left\{(A,1);(B,2)\right\}$

2ème méthode : Si on sait que lorsque G est le barycentre d'un système $\left\{(A,\alpha);(B,\beta)\right\}$ (avec $\alpha+\beta\neq 0$), alors $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$, on identifie sans difficulté, à partir de l'égalité $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}$ les coefficients $\alpha=1$ et $\beta=2$.

Figure 2 : Sur la figure 2) on « lit » que $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ou on procède par identification, en remarquant que $\overrightarrow{AG}=\frac{-1}{3+(-1)}\overrightarrow{AB}$, d'où $\alpha=3$ et $\beta=-1$,

ou on « se lance » dans les égalités vectorielles :

$$\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow-3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

donc G est le barycentre du système $\left\{(A,-3);(B,1)\right\}$ ou encore du système $\left\{(A,(-3)\times(-1));(B,1\times(-1))\right\}$, c'est-à-dire du système $\left\{(A,3);(B,-1)\right\}$ (car on peut multiplier tous les coefficients du système par un même réel non nul).

On retrouve bien le même résultat

Figure 3 : L'observation de la figure 3) conduit à remarquer que on « lit » que $\overrightarrow{AG}=\frac{11}{6}\overrightarrow{AB}$

Par identification, $\overrightarrow{AG}=\frac{11}{-5+11}\overrightarrow{AB}$, donc $\alpha=-5$ et $\beta=11$.

Par égalités vectorielles,

$$\overrightarrow{AG}=\frac{11}{6}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG}-11\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AG}-11\overrightarrow{AG}-11\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow-5\overrightarrow{AG}-11\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 5\overrightarrow{GA}-11\overrightarrow{GB}=\vec{0}$$

donc G est le barycentre du système $\left\{(A,5);(B,-11)\right\}$ ou encore du système $\left\{(A,-5);(B,11)\right\}$,

Exercice n°5

Pour construire le barycentre d'un système de trois points pondérés, il faut regrouper deux d'entre eux au sein d'un « système partiel », en construire le « barycentre partiel », puis remplacer ce système par son barycentre affecté de la somme des coefficients. Autrement dit,

1) Soit $G=Bar\left\{(A,4);(B,3);(C,-1)\right\}$ le point à construire.

Si on note $H=Bar\left\{(A,4);(C,-1)\right\}$, qui est défini par $\overrightarrow{AH}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ (construction ci-dessous), alors :

$G=Bar\left\{(A,4);(B,3);(C,-1)\right\}$

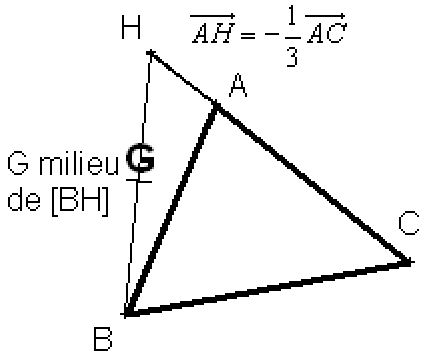
$=Bar\left\{(H,4-1);(B,3)\right\}$

$=Bar\left\{(H,3);(B,3)\right\}$

$=Bar\left\{(H,1);(B,1)\right\}$

c'est-à-dire G milieu de [HB].

On a ainsi construit le point G grâce au barycentre partiel H



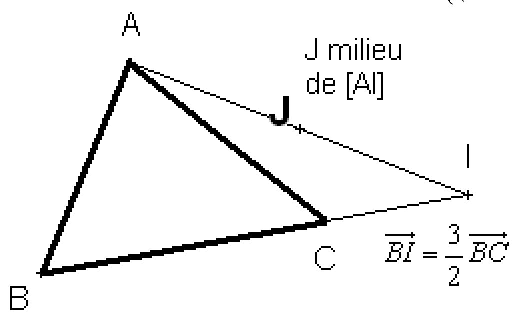
2) Pour construire le barycentre $J = Bar\left\{\left(A,\frac{1}{6}\right);\left(B,-\frac{1}{12}\right);\left(C,\frac{1}{4}\right)\right\}$, on commence par multiplier tousles coefficients par 12 : $J = Bar\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$. On regroupe les deux derniers points en posant $I = Bar\{(B,-1);(C,3)\}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ (construction ci-contre),

Ensuite, il vient

$J = Bar\{(A,2);(B,-1);(C,3)\}$

$= Bar\{(A,2);(I,2)\} = Bar\{(A,1);(I,1)\}$

donc J est le milieu de [AI]



Exercice n°6

Si H est le barycentre du système $\{(A,3);(B,2)\}$, alors $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Si K est le barycentre du système $\{(B,2);(C,-1)\}$, alors $\overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{BC}$

Si L est le barycentre du système $\{(A,3);(C,-1)\}$, alors $\overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Si G est le barycentre du système $\{(H,5);(C,-1)\}$, alors $\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{HC}$

1) Pour montrer que $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, deux méthodes (au moins !) sont possibles :

1ère méthode : « calculs vectoriels » :

$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$

$= 3\left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}\right) + 2\left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}\right) - \left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC}\right)$

$= \underbrace{3\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GH}}_{4\overrightarrow{GH}} + \underbrace{3\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB}}_{\substack{\vec{0} \\ \text{car } H = Bar\{(A,3);(B,2)\}}} - \overrightarrow{HC}$

$= 4\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HC}$

$= \vec{0}$ car $\overrightarrow{HG} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{HC} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HC}$

2ème méthode : En utilisant la technique dite des « barycentres partiels » , on écrit :

$G = Bar\left\{\underbrace{(H,5)}_{\text{car}} \quad ;(C,-1)\right\}$

$= Bar\left\{\overbrace{(A,3);(B,2)}^{H = Bar((A,3);(B,2))};(C,-1)\right\}$

ce qui permet de conclure directement que $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (c'est la définition !)

2) Puisque L est le barycentre du système $\{(A,3);(C,-1)\}$, on écrit

$G = Bar\{(A,3);(B,2);(C,-1)\}$

$= Bar\{(L,3-1);(B,2)\}$

$= Bar\{(L,2);(B,2)\} = Bar\{(L,1);(B,1)\}$

donc G est le milieu du segment [BL]

b) Puisque K est le barycentre du système $\{(B,2);(C,-1)\}$, on écrit :

$G = Bar\{(A,3);(B,2);(C,-1)\} = Bar\{(A,3);(K,2-1)\}$, c'est-à-dire $G = Bar\{(A,3);(K,1)\}$

Exercice n°7

1) Si K est le barycentre d'un système de points pondérés (C,1),(B,-4), alors on peut écrire :

$\overrightarrow{KC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, qui traduit le fait que B est le barycentre du système $\{(K,3);(C,1)\}$

2) En utilisant le barycentre partiel B du système $\{(K,3);(C,1)\}$, on écrit :

$$Bar\{(A,2);(K,3);(C,1)\} = Bar\{(A,2);(B,3+1)\} = Bar\{(A,2);(B,4)\} = Bar\{(A,1);(B,2)\}$$

Le barycentre cherché est donc le point J

3) Puisque $J = Bar\{(A,2);(K,3);(C,1)\}$, en utilisant le fait que I le barycentre des points pondérés (A,2),(C,1), on écrit $J = Bar\{(I,2+1);(K,3)\} = Bar\{(I,3);(K,3)\} = Bar\{(I,1);(K,1)\}$ donc J est le milieu de [IK].

4) En utilisant la technique des « barycentres partiels », on écrit : Si L est le milieu de [CI], alors

$$L = Bar\{(I,1);\,(C,1)\} = Bar\left\{\underbrace{(I,3)}_{\text{d'après l'énoncé}} \;;\quad (C,3)\right\}$$

$$= Bar\left\{\overbrace{(A,2);(C,1)}^{I=Bar\{(A,2);(C,1)\}};\quad (C,3)\right\} = Bar\{(A,2);(C,4)\} = Bar\{(A,1);(C,2)\}$$

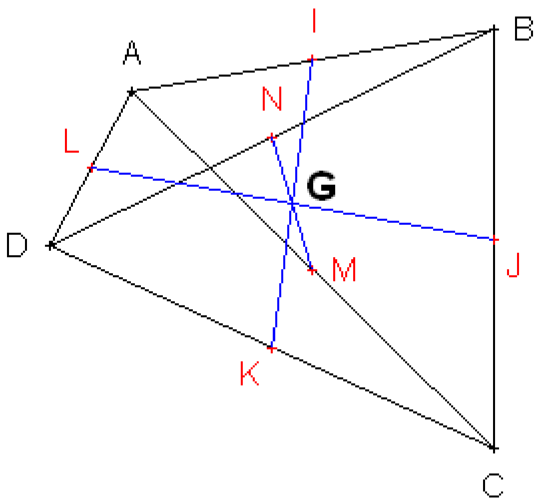
donc $a = 1$ et $b = 2$. De la même manière,

$$L = Bar\{(K,1);(C,1)\} = Bar\left\{\underbrace{(K,-3)}_{\text{d'après l'énoncé}} \;;\quad (C,-3)\right\}$$

$$= Bar\left\{\overbrace{(C,1);(B,-4)}^{K=Bar\{(C,1);(B,-4)\}};\quad (C,-3)\right\} = Bar\{(B,-4);(C,-2)\} = Bar\{(B,2);(C,1)\}$$

$c = 2$ et $d = 1$

Exercice n°8



Puisque I est le milieu de [AB], alors $I = Bar\{(A,1);(B,1)\}$

Puisque J est le milieu de [BC], alors $J = Bar\{(B,1);(C,1)\}$

Puisque K est le milieu de [CD], alors $K = Bar\{(C,1);(D,1)\}$

Puisque L est le milieu de [DA], alors $L = Bar\{(A,1);(D,1)\}$

Puisque M est le milieu de [AC], alors $M = Bar\{(A,1);(C,1)\}$

Puisque N est le milieu de [BD], alors $N = Bar\{(B,1);(D,1)\}$

Notons $G = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\}$

En effectuant deux regroupements de barycentres partiels, on écrit :

$$G = Bar\left\{\underbrace{(A,1);(B,1)}_{I=Bar\{(A,1);(B,1)\}};\underbrace{(C,1);(D,1)}_{K=Bar\{(C,1);(D,1)\}}\right\}$$

$$= \quad Bar\{(I,2) \quad ; \quad (K,2)\} \;= Bar\{(I,1);(K,1)\}$$

donc G est le milieu de [IK].

En effectuant un deuxième regroupement, à l'aide de $M = Bar\{(A,1);(C,1)\}$ et $N = Bar\{(A,1);(C,1)\}$, on écrit que $G = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = Bar\{(M,2);(N,2)\} = Bar\{(M,1);(N,1)\}$, donc que G est le milieu de [MN].

Enfin, à l'aide du regroupement $J = Bar\{(B,1);(C,1)\}$ et $L = Bar\{(A,1);(D,1)\}$, on écrit $G = Bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(D,1)\} = Bar\{(J,2);(L,2)\} = Bar\{(J,1);(L,1)\}$, donc G est le milieu de [JL].

Les trois segments [IK], [MN] et [LJ] sont donc concourrants en leur milieu commun G.

Exercice n°9

1) Si on note G le barycentre $G = Bar\{(A,2);(B,1)\}$ (donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$) et H le barycentre $H = Bar\{(C,5);(D,-2)\}$ (donc $\overrightarrow{CH} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$), alors pour tout point M du plan, on a

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$$
$$= 2\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}$$
$$= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}}_{\vec{0} \text{ car } G = Bar\{(A,2);(B,1)\}} = 3\overrightarrow{MG}$$

et de même, pour tout point M du plan,

$$5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = 5\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC}\right) - 2\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HD}\right)$$
$$= 3\overrightarrow{MH} + 5\overrightarrow{HC} - 2\overrightarrow{HD} = 3\overrightarrow{MH} + \vec{0}$$

L'égalité $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|5\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}\right\|$ devient alors équivalente à $\left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MH}\right\|$, donc à $3MG = 3MH \Leftrightarrow GM = HM$

Le point M est donc équidistant des points G et H, donc appartient à la médiatrice du segment [GH].

Γ_1 est donc la médiatrice de [GH] (en bleu sur le dessin)

Notons I le milieu de [GH].

Alors $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{IC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ puisque ABCD est un rectangle. D'autre part $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$. On en déduit donc que $\overrightarrow{IH} = -\overrightarrow{IG}$, donc que I est le milieu de [GH], donc que I appartient bien à la médiatrice Γ_1 de [GH]

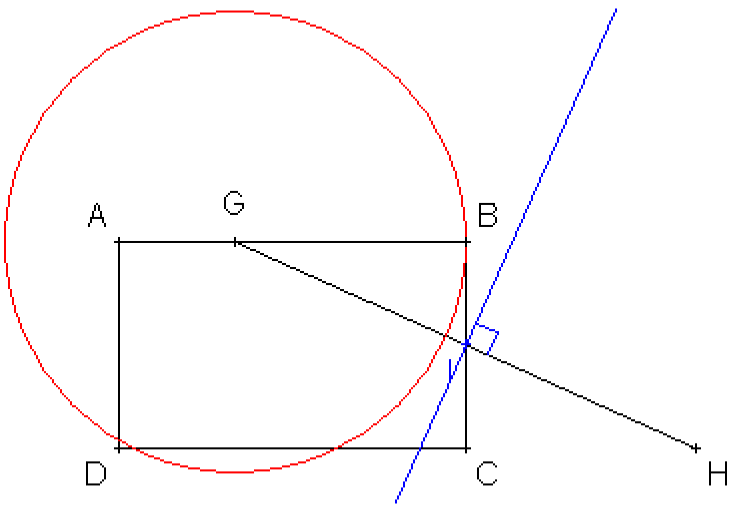
2) On utilise de nouveau le point $G = Bar\{(A,2);(B,1)\}$ pour écrire l'équivalence :

$$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = 2AB \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 12 \Leftrightarrow 3GM = 12 \Leftrightarrow GM = 4$$

M appartient donc au cercle de centre G et de rayon 4.

Γ_2 est donc le cercle de centre G et de rayon 4 (en rouge sur le dessin)

Puisque $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, on en déduit que $\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\left\|\overrightarrow{GB}\right\| = \left\|\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow BG = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3} \times 6 = 4$, donc M appartient donc au cercle Γ_2 de centre G et de rayon 4.



Exercice n°10 - Deux méthodes équivalentes sont envisageables :

1ère méthode :

L'application des formules du cours : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$,

Qui se traduisent ici par $x_G = \frac{2 \times (-1) - 3 + 3 \times 2}{2 - 1 + 3} = \frac{1}{4}$ et $y_G = \frac{2 \times 2 - 1 + 3 \times 4}{2 - 1 + 3} = \frac{15}{4}$

2ème méthode : Le retour à la définition générale :

Le point G barycentre du système (A;2), (B;-1) et (C;3) vérifie donc $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Si on note $G(x_G;y_G)$, on exprime en fonction de x_G et y_G les coordonnées des vecteurs :

$\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} x_A-x_G=-1-x_G \\ y_A-y_G=2-y_G \end{vmatrix.$ donc $2\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} 2(-1-x_G)=-2-2x_G \\ 2(2-y_G)=4-2y_G \end{vmatrix.$; $\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} x_B-x_G=3-x_G \\ y_B-y_G=1-y_G \end{vmatrix.$ donc $-\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} -(3-x_G)=x_G-3 \\ -(1-y_G)=y_G-1 \end{vmatrix.$

$\overrightarrow{GC}\begin{vmatrix} x_C-x_G=2-x_G \\ y_C-y_G=4-y_G \end{vmatrix.$ donc $3\overrightarrow{GC}\begin{vmatrix} 3(2-x_G)=6-3x_G \\ 3(4-y_G)=12-3y_G \end{vmatrix.$

On arrive ainsi aux coordonnées de $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}$:

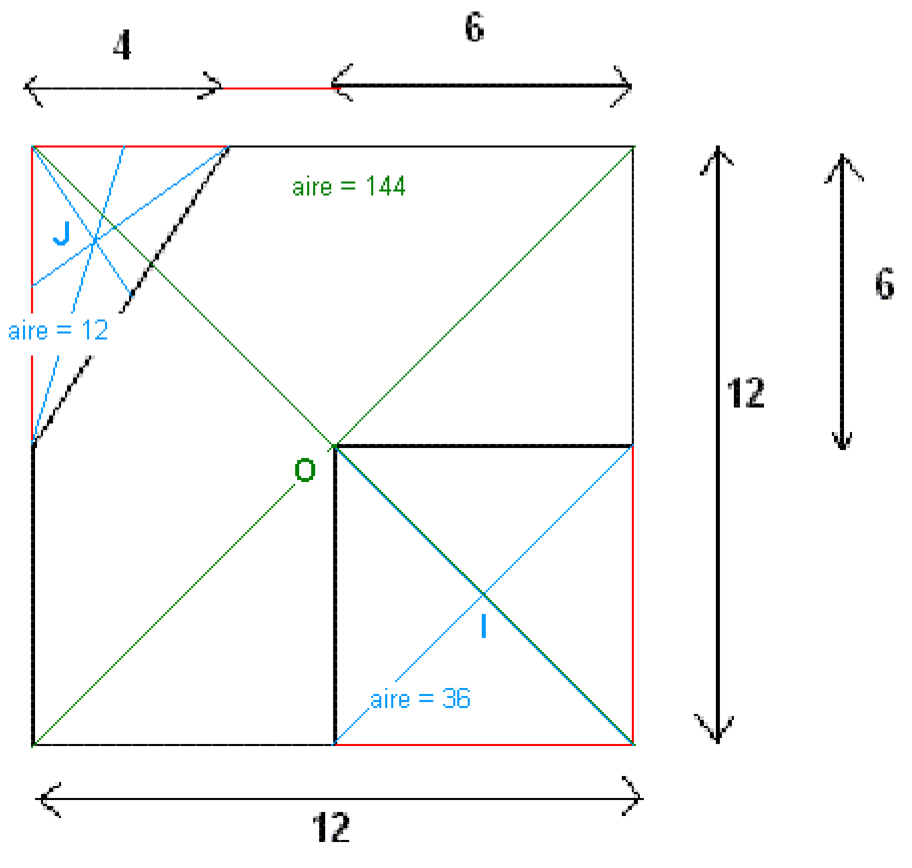
$2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}\begin{vmatrix} -2-2x_G+x_G-3+6-3x_G=-4x_G+1 \\ 4-2y_G+y_G-1+12-3y_G=-4y_G+15 \end{vmatrix.$

Puisque $2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0}$, et que le vecteur nul possède deux coordonnées…nulles !, on obtient les deux équations $-4x_G+1=0$ et $-4y_G+15=0$ grâce auxquelles on retrouve bien $x_G=\frac{1}{4}$ et $y_G=\frac{15}{4}$

Exercice n°11

Deux « zones » ont évidé le « grand carré » d'aire 144 unités d'aire, de centre de gravité O (intersection des diagonales en vert) : - Un triangle d'aire $\frac{4\times 6}{2}=12$ unités d'aires, de centre de gravité J (intersection des médianes en bleu)

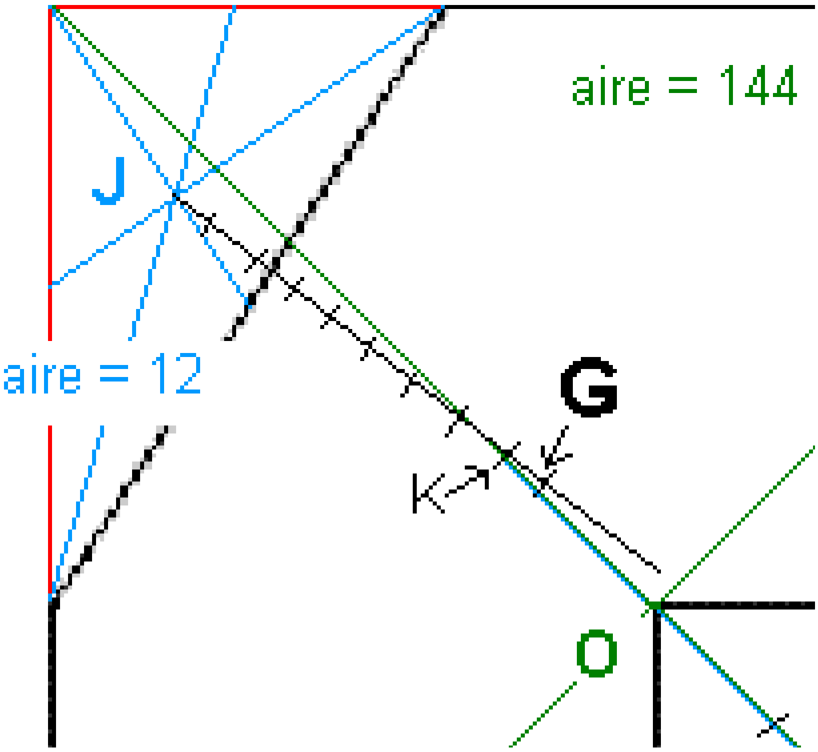
- Un « petit carré » d'aire 36 unités d'aires, de centre de gravité I (intersection des diagonales en bleu)



Le centre de gravité « global » sera le point G barycentre :

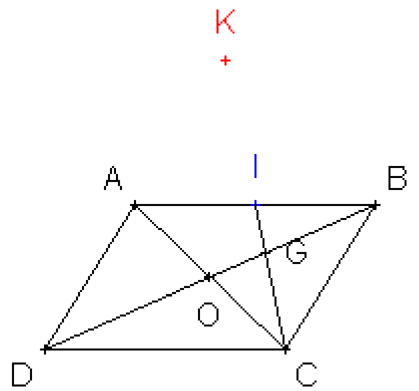
$G=Bar\{(O,144);(J,-12);(I,-36)\}=Bar\{(O,12);(J,-1);(I,-3)\}$

En introduisant le barycentre partiel $K=Bar\{(O,12);(I,-3)\}=Bar\{(O,4);(I,-1)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{OK}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OI}$ (construction : figure ci-dessous), on se retrouve avec $G=Bar\{(J,-1);(K,9)\}\Leftrightarrow\overrightarrow{JG}=\frac{9}{8}\overrightarrow{JK}$


aire = 144
J
aire = 12
G
K
O

Exercices de synthèse :

Exercice n°12



1) Si on note O l'intersection des diagonales du parralélogramme, O est le milieu de [AC]. Le segment [BD] (ou [BO]) est donc, dans le triangle ABC, la médiane issue de B. De même, le segment [BI]est la médiane issue de C, puisque I est le milieu de [AB]. Le point G intersection de (DB) et (CI) est donc le centre de gravité (ou encore isobarycentre) du triangle ABC. Il vérifie donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2) a) En regroupant les points A et B par l'intermédiaire de leur milieu I, on écrit : $K=Bar\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}=Bar\{(I,2);(C,-1)\}\Leftrightarrow \overrightarrow{IK}=-\overrightarrow{IC}$, on en déduit que I est le milieu de [KC], d'où la construction du point K (en rouge) :

b) En utilisant la décomposition $G=Bar\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$, puis en regroupant les coefficients du point C, on obtient :

$$Bar\{(G,3);(C,-2)\}=Bar\{(A,1);(B,1);(C,1);(C,-2)\}=Bar\{(A,1);(B,1);(C,1-2)\}=Bar\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}=K$$

3) On écrit

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{AC}+\underbrace{\overrightarrow{DA}}_{\substack{\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}\\ \text{car ABCD}\\ \text{est un}\\ \text{parallélogramme}}}=\vec{0}$$

On en déduit $-3\overrightarrow{AG}+2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}$, ou encore, en multipliant par -1 : $3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ donc A est le barycentre des points pondérés (D ; 1) , (G ; 3) et (C ; -2)

b) Puisque $A=Bar\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$, et puisque $K=Bar\{(G,3);(C,-2)\}$ (question 2b), on en déduit que $A=Bar\{(D,1);(K,3-2)\}=Bar\{(D,1);(K,1)\}$ donc A est le milieu du segment [DK]

4) En utilisant les barycentres $A=Bar\{(D,1);(G,3);(C,-2)\}$ et $I=Bar\{(A,1);(B,1)\}$ milieu de [AB], on écrit l'équivalence $\left\|\overrightarrow{MD}+3\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|\Leftrightarrow\left\|2\overrightarrow{MA}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MI}\right\|\Leftrightarrow AM=IM$.

M appartient donc à la médiatrice du segment [AI]

5) a) Le barycentre du système (D , m) , (G ; 3) et (C ; -2) existe si et seulement si la somme des coefficients du système est non nulle, c'est-à-dire si et seulement si $1+m\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$. Le barycentre du système (D , m) , (G ; 3) et (C ; -2) existe donc pour tout $m\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$

b) Pour tout $m\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$, si on note $I_m=Bar\{(D,m);(G,3);(C,-2)\}$, on a donc

$$m\overrightarrow{I_mD}+3\overrightarrow{I_mG}-2\overrightarrow{I_mC}=\vec{0}\Leftrightarrow m\overrightarrow{I_mD}+3\left(\overrightarrow{I_mD}+\overrightarrow{DG}\right)-2\left(\overrightarrow{I_mD}+\overrightarrow{DC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_mD}+3\overrightarrow{DG}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_mD}+3\left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KG}\right)-2\left(\overrightarrow{DK}+\overrightarrow{KC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)\overrightarrow{I_mD}+\overrightarrow{DK}+\underbrace{3\overrightarrow{KG}-2\overrightarrow{KC}}_{\vec{0}}=\vec{0}$$

Ainsi $(m+1)\overrightarrow{I_mD}=-\overrightarrow{DK}\Leftrightarrow \overrightarrow{DI_m}=\dfrac{1}{m+1}\overrightarrow{DK}$

c) Si on note $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, défini sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, on calcule $f(x)=\dfrac{-1}{(1+x)^2}<0$ donc f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;-1\right[$ et sur $\left]-1;+\infty\right[$. De plus $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}f(x)=+\infty$.

D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)=\dfrac{1}{1+x}$	0 ↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘ 0

d) D'après le tableau de variations, l'image de l'ensemble $\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-1;+\infty\right[$ est l'ensemble $\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$. Ainsi le coefficient de colinéarité $\dfrac{1}{m+1}$ existant entre $\overrightarrow{DI_m}$ et $\overrightarrow{DK}$ parcourant tout l'ensemble $\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, le point I_m parcourt toute la droite (DK), sauf le point D

Exercice n°13

Dans le plan (P), on considère un triangle ABC isocèle en A, de hauteur [AH], telle que AH=BC=4, l'unité choisie étant le centimètre.

1) On introduit le milieu H de [BC] (puisque dans un triangle isocèle en A, la hauteur issue de A est aussi médiane issue de A), pour conclure que $G = Bar\{(A,2);(B,1);(C,1)\} = Bar\{(A,2);(H,2)\} = Bar\{(A,1);(H,1)\}$ est le milieu de [AH].

2) Pour tout point M,

$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right) - \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{AH}$

donc $\left\|\vec{V}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{AH}\right\| = 2AH = 8$

3) En utilisant le barycentre $G = Bar\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$, on écrit l'équivalence :

$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\vec{V}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = 8 \Leftrightarrow GM = 2$. M parcourt donc le cercle de centre G et de rayon 2

4) a) Le barycentre G_n du système de points pondérés $\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$ existe quel que soit l'entier naturel n car la somme des coefficients vaut 2+ n qui ne s'annule pas si n est un entier naturel

b) En introduisant le milieu H de [BC], on écrit $G_n = Bar\{(A,2);(B,n);(C,n)\} = Bar\{(A,2);(H,2n)\}$ donc $\overrightarrow{AG_n} = \frac{2n}{2+2n}\overrightarrow{AH} = \frac{n}{1+n}\overrightarrow{AH}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{1+n} < 1$, le coefficient de colinéarité entre $\overrightarrow{AG_n}$ et $\overrightarrow{AH}$ étant un réel compris entre 0 et 1, on peut affirmer que G_n appartient au segment [AH].

c) En introduisant le barycentre $G_n = Bar\{(A,2);(B,n);(C,n)\}$, on écrit l'équivalence :

$\left\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\| \Leftrightarrow \left\|(2+2n)\overrightarrow{MG_n}\right\| = 8n \Leftrightarrow G_nM = \frac{8n}{2+2n} = \frac{4n}{1+n}$.

Le point M parcourt donc le cercle Γ_n de centre G_n et de rayon $\frac{4n}{1+n}$.

Le point A appartient à Γ_n car l'égalité $\left\|2\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} + n\overrightarrow{MC}\right\| = n\left\|\vec{V}\right\|$ est vérifiée si on remplace M par A.

En effet d'une part $\left\|2\overrightarrow{AA} + n\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|n\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\right\| = n\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = n\left\|2\overrightarrow{AH}\right\| = 8n$, et d'autre part $n\left\|\vec{V}\right\| = 8n$.

D'où l'égalité, qui prouve que le point A appartient à Γ_n.

d) L'égalité $\overrightarrow{AG_n} = \frac{n}{1+n}\overrightarrow{AH}$ implique que $AG_n = \frac{4n}{1+n}$

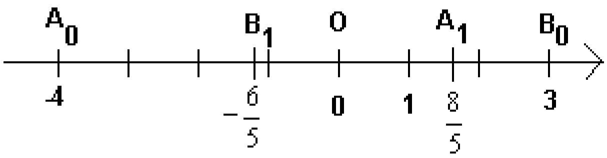
5) $\lim\limits_{n\to+\infty} AG_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n}{1+n} = 4$ et G_n appartenant au segment [AH] nous permettent de conclure que lorsque n tend vers $+\infty$, le point G_n se rapproche indéfiniment (tend vers) du point H.

Exercice n°14

1) A_1 le barycentre de $(A_0,1)$ et $(B_0,4)$, donc $a_1 = \frac{1a_0 + 4b_0}{5} = \frac{8}{5}$

B_1 le barycentre de $(A_0,3)$ et $(B_0,2)$, donc $b_1 = \frac{3a_0 + 2b_0}{5} = -\frac{6}{5}$

On obtient donc :



2) A_{n+1} est le barycentre de $(A_n,1)$ et $(B_n,4)$ donc $a_{n+1} = \frac{a_n + 4b_n}{5} = \frac{1}{5}(a_n + 4b_n)$

B_{n+1} est le barycentre de $(A_n,3)$ et $(B_n,2)$ donc $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2b_n}{5} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n)$

3) a) Initialisation : On vérifie que : $3a_0 + 4b_0 = 3\times(-4) + 4\times 3 = 0$

Hérédité : On considère que pour un entier naturel n, $3a_n + 4b_n = 0$

On calcule alors :

$$3a_{n+1}+4b_{n+1}=3\times\frac{1}{5}\left(a_n+4b_n\right)+4\times\frac{1}{5}\left(3a_n+2b_n\right)=\frac{3a_n+12b_n+12a_n+8b_n}{5}=\frac{15a_n+20b_n}{5}=3a_n+4b_n$$

Or $3a_n+4b_n=0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

<u>Conclusion :</u>

Pour $n\in\mathbb{N}$, $3a_n+4b_n=0$

b) Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $3a_n+4b_n=0$, alors $b_n=-\frac{3}{4}a_n$ et $a_n=-\frac{4}{3}b_n$.

Ainsi, l'égalité $a_{n+1}=\frac{1}{5}\left(a_n+4b_n\right)$ devient $a_{n+1}=\frac{1}{5}\left(a_n+4\times\left(-\frac{3}{4}a_n\right)\right)=\frac{1}{5}\left(a_n-3a_n\right)=-\frac{2}{5}a_n$

L'égalité $b_{n+1}=\frac{1}{5}\left(3a_n+2b_n\right)$ devient $b_{n+1}=\frac{1}{5}\left(3\times\left(-\frac{4}{3}b_n\right)+2b_n\right)=\frac{1}{5}\left(-4b_n+2b_n\right)=-\frac{2}{5}b_n$

4) a) La suite a est donc géométrique de raison $-\frac{2}{5}$ et de premier terme $a_0=-4$. Ainsi, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$a_n=a_0\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n=-4\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n.$$

De même, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n=3\times\left(-\frac{2}{5}\right)^n$.

b) La raison des suites géométriques a et b appartient à l'intervalle]-1 ;1[, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$

c) Lorsque n tend vers $+\infty$, les points A_n et B_n se rapprochent aussi près que l'on veut de l'origine O de la droite graduée.