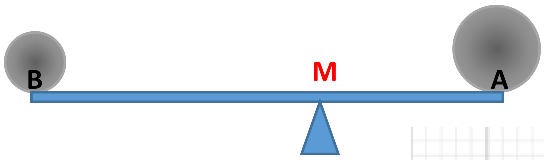
BARYCENTRE

I) ACTIVITES

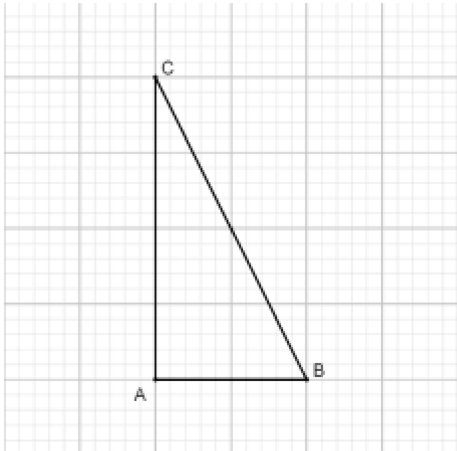
Activité 1 :

Sur une barre rigide de poids négligeable et de longueur $1m$ on considère deux boules métalliques de $500\ g$ en A et de $350\ g$ en B. M un point sur la barre.

Déterminer la position de M sachant que le système et e équilibre.



Activité 2 :



Soit ABC un triangle rectangle en A et $AC = 2AB$.

1- Montrer qu'il existe un et un seul point G tel que : $2\,\overrightarrow{AG} - 3\,\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

2- Tracer le point G.

3- Si le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI})$ où I est milieu de $[AC]$, quels seront les coordonnées du point G.

Activité 3 :

Soit $(A_i)_{i\leq 4}$ une famille de 4 points, et $(\alpha_i)_{i\leq 4}$ 4 réels dont la somme est non nulle.
Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \varphi:\ \mathcal{P} &\to \mathcal{V}_2 \\ M &\mapsto \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} \end{aligned}$$

est une bijection. L'application φ s'appelle **l'application de Leibniz** (Wilhelm Leibniz 1646-1716)

II) DEFINITIONS ET PROPRIETES :

1) Vocabulaires

Définitions :

- Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un **point pondéré**.
- Plusieurs points pondérés constituent un **système pondéré**

2) Barycentre de deux points pondérés.

2.1 Définitions.

Propriété :

Soit $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta \neq 0$ l'application $\begin{aligned} \varphi_2:\ \mathcal{P} &\to \mathcal{V}_2 \\ M &\mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM} \end{aligned}$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_2(G) = \vec{0}$

Preuve : φ_2 est l'application de Leibniz pour deux points

Définition :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$.

On écrit : $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

2.2 Propriétés de barycentre de deux points pondérés.

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

On a donc $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$ et par suite : pour tout réel k non nul on a : $k\alpha\overrightarrow{AG} + k\beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

et donc $G = Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta)\}$.

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

- Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ s'appelle **l'isobarycentre de A et B** qui n'est que la milieu du segment $[AB]$.
- **Construction :**

Construire $G = Bar\{(A,3);(B,2)\}$

- Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

  On a donc : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

  par suite : $\alpha\overrightarrow{AO} + \alpha\overrightarrow{OG} + \beta\,\overrightarrow{BO} + \beta\,\overrightarrow{OG} = \vec{0}$ où O est un pont quelconque dans le plan $(\mathcal{P})$

  d'où : $(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} + \alpha\overrightarrow{AO} + \beta\,\overrightarrow{BO} = \vec{0}$

  on conclut que : $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OB}$. (car $\alpha+\beta \neq 0$)

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$.

Pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$ on a : $\boldsymbol{\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{OB}}$.

Cette propriété s'appelle **la propriété caractéristique** du barycentre.

Propriété :

Si $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

Preuve :

Il suffit d'utiliser la propriété précédente en posant $A = O$ dans la propriété ; On aura $\overrightarrow{AG} = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\overrightarrow{AB}$

D'où les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et par suite : les points A, B et G sont alignés.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) x_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right) x_B \\ y_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) y_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right) y_B \end{cases}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la propriété caractéristique du barycentre.

Exercice :

Considérons les applications $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x$ définies sur $\mathbb{R}$ soient C_f et C_g leurs courbes respectives dans un repère orthonormé. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, on pose M_x le point de C_f d'affixe x et N_x le point d'affixe x de C_g.

1- Déterminer les coordonnées du point G_x isobarycentre de M_x et N_x.

2- Déterminer et tracer l'ensemble dans lequel varie G_x quand x varie dans $\mathbb{R}$.

3) Barycentre de trois points pondérés

3.1 Définition

Propriété :

Soit $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ l'application :

$$\varphi_3 : \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$$
$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM} + \gamma\,\overrightarrow{CM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_3(G) = \vec{0}$

c est à dire : $\alpha\overrightarrow{AG} + \beta\,\overrightarrow{BG} + \gamma\,\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

Preuve : φ_3 est l'application de Leibniz pour trois points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

On a pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$: $\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{OC}$

Preuve : Même démonstration que dans le cas précèdent.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soient $A(x_A,y_A)$; $B(x_B,y_B)$ $C(x_C,y_C)$

et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_B + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) x_C \\ y_G = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_A + \left(\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_B + \left(\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\right) y_C \end{cases}$$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\} = Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ où $\alpha+\beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$

Montrer que $G = Bar\{(G', (\alpha+\beta)); (C,\gamma)\}$

Propriété :

Si $G = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma)$ avec $\alpha+\beta \neq 0$ et $G' = Bar\{(A,\alpha); (B,\beta)\}$
Alors : $G = Bar\{(G', (\alpha+\beta)); (C,\gamma)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

Application :

Construire le barycentre du système pondéré $\{(A,-2); (B,3); (C,1)\}$

Cas particulier

Si les poids $\alpha; \beta$ et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\alpha); (B,\alpha); (C,\alpha)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\,\overrightarrow{CM} \\ \vec{v} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} - 2\,\overrightarrow{CM} \end{cases}$$

1- Réduire l'écriture de $\vec{u}$.
2- Montrer que le vecteur $\vec{v}$ est constant.
3- Déterminer l'ensemble des points M tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

Exercice 2 :

Déterminer les ensembles suivants :

$\Delta = \{M \in (\mathcal{P}) / \|4\,\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{AM} + 2\,\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\|\}$

$\Gamma = \{M \in (\mathcal{P}) / \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|3\,\overrightarrow{AM} - 2\,\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|\}$

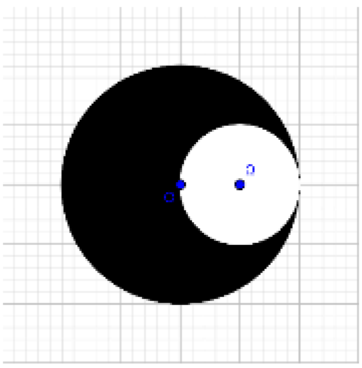
Exercice 3 :

Le solide (S) est constitué d'un disque $(\mathcal{D})$ dont on a enlevé le disque $(\mathcal{D}')$

$(\mathcal{D})$ est le disque de centre O et de rayon $2R$

$(\mathcal{D}')$ est le disque de centre Ω et de rayon R

Déterminer et tracer le centre de gravité du solide.



5) Barycentre de quatre points pondérés

3.1 Définition

Propriété :

Soit $\{(A,\alpha); (B,\beta); (C,\gamma); (D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ l'application :

$$\varphi_4 : \mathcal{P} \to \mathcal{V}_2$$
$$M \mapsto \alpha\overrightarrow{AM} + \beta\,\overrightarrow{BM} + \gamma\,\overrightarrow{CM} + \delta\,\overrightarrow{DM}$$

est une bijection. Il existe un et un seul point G qui vérifie $\varphi_4(G) = \vec{0}$

Preuve : φ_4 est l'application de Leibniz pour quatre points

Propriété :

Soit $\Sigma = \{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$ et

$G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ On a pour tout point O du plan $(\mathcal{P})$:

$\overrightarrow{OG} = \left(\frac{\alpha}{S}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\beta}{S}\right)\overrightarrow{OB} + \left(\frac{\gamma}{S}\right)\overrightarrow{OC} + \left(\frac{\delta}{S}\right)\overrightarrow{OD}$ **où** $S = \alpha+\beta+\gamma+\delta$

Preuve : Même démonstration que dans les cas précédents.

Propriété :

Le plan $(\mathcal{P})$ et rapporté à un repère $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, Soients $A(x_A,y_A)$; $B(x_B,y_B)$; $C(x_C,y_C)$ et $D(x_D,y_D)$

et $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ on a :

$$\begin{cases} x_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right)x_A + \left(\frac{\beta}{S}\right)x_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right)x_C + \left(\frac{\delta}{S}\right)x_D \\ y_G = \left(\frac{\alpha}{S}\right)y_A + \left(\frac{\beta}{S}\right)y_B + \left(\frac{\gamma}{S}\right)y_C + \left(\frac{\delta}{S}\right)y_D \end{cases}$$

Où $S = \alpha+\beta+\gamma+\delta$

Propriété :

Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : $Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\} = Bar\{(A,k\alpha);(B,k\beta);(C,k\gamma);(D,k\delta)\}$ pour $k \neq 0$

Exercice :

Soit $G = Bar\{Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ où $\alpha+\beta \neq 0$ et $\gamma+\delta \neq 0$

Si $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G" = Bar\{(C,\gamma);(D,\delta)\}$

Montrer que : $G = Bar\{(G',(\alpha+\beta));(G",\gamma+\delta)\}$

Propriété :

Si $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ avec $\alpha+\beta \neq 0$ et $\gamma+\delta \neq 0$

Si $G' = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta)\}$ et $G" = Bar\{(C,\gamma);(D,\delta)\}$

Alors $G = Bar\{(G',(\alpha+\beta));(G",\gamma+\delta)\}$

Remarque :

La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de quatre points pondérés.

Application :

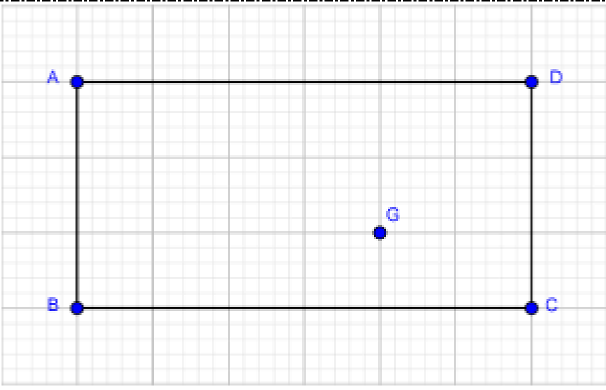
$ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 2BC$ Construire le barycentre du système pondéré $\{(A,-2);(B,3);(C,1);(D,1)\}$

Cas particulier

Si les poids α; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A,\alpha);(B,\alpha);(C,\alpha);(D,\delta)\}$ s'appelle **le centre de gravité** du quadrilatère $ABCD$.

Exercice :

Déterminer des poids α,β,γ et δ pour les points A,B,C et D pour que $G = Bar\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma);(D,\delta)\}$ dans le figure ci-dessous


A
D
G
B
C