Généralités sur les fonctions

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1 (T)**

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$ **2)** $f_2(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 - 1}$ **3)** $f_3(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^3 - 1}$
4) $f_4(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ **5)** $f_5(x) = \cos(2x) + \tan^2(x)$ **6)** $f_6(x) = \sin(x) - x$
7) $f_7(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ **8)** $f_8(x) = \dfrac{x}{x^6 - x^4 - 31x^2 + 3}$ **9)** $f_9(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

Exercice n° 2 (*I)**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice n° 3 (I)**

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est paire, sa dérivée est impaire et si f est impaire, alors sa dérivée est paire.
Généraliser à f'', $f^{(3)}$, ..., $f^{(n)}$, $n \geqslant 2$.

A-t-on des résultats analogues pour les primitives ?

Exercice n° 4 (T)**

1) Montrer que la droite d'équation $x = \dfrac{3}{2}$ est un axe de symétrie du graphe dans un repère orthonormé de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$.

2) Montrer que le point I de coordonnées $(1, 2)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$.

3) Montrer que le point I de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie du graphe de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

4) Etudier les symétries de la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \cos(3x)$.

Exercice n° 5 (T)**

Etudier la périodicité des fonctions suivantes :

1) $f_1(x) = E(x) - x$ **2)** $f_2(x) = E(2x) - 2x$ **3)** $f_3(x) = \cos(2x) - \sin(4x)$
4) $f_4(x) = \cos(4x)$ **5)** $f_5(x) = \cos\left(\dfrac{3x}{2}\right)$ **6)** $f_6(x) = \cos\left(\dfrac{2x}{3}\right)$.

n° 6 (T)**

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2 + 1}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 7 (T)**

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur le domaine considéré.

1) $x \mapsto -3(x+1)^2 + 1$, $I = \mathbb{R}$ **2)** $x \mapsto 3 - \dfrac{5}{2x+1}$, $I = \left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$ **3)** $x \mapsto \ln(1 + e^x)$, $I = \mathbb{R}$
4) $x \mapsto \exp\left(1 - \dfrac{1}{\ln^2|x| + 1}\right)$, $I = \mathbb{R}^*$ **5)** $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ **6)** $x \mapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xt}\,dt$

PROF: ATMANI NAJIB

Exercice n° 8 (T)**

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle considéré.

1) $x \mapsto \sin x - \cos x,\ I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ **2)** $x \mapsto x \ln x,\ I = [1, +\infty[$ **3)** $x \mapsto e^{3x^2-1} \cos\left(\frac{\pi}{2(x^2+1)}\right),\ I = \mathbb{R}$

4) $x \mapsto \frac{2x+3}{x-1},\ I =]1, +\infty[$ **5)** $x \mapsto \frac{x^4-1}{x^4+1},\ I = \mathbb{R}$ **6)** $x \mapsto -x^7 + x^4 + x^2 + 3,\ I =]-\infty, 0]$

Exercice n° 9 (*T)

1) Montrer que, si x est un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$, on a $\frac{3}{11} \leqslant \frac{2x+1}{4x+3} \leqslant \frac{5}{7}$.

2) Résoudre l'équation $\frac{2x+1}{4x+3} = \frac{3}{11}$. Que constatez-vous ?

3) Encadrer au mieux $\frac{2x+1}{4x+3}$ pour $x \in [1, 2]$.

Exercice n° 10 (*T)

Encadrer au mieux les expressions suivantes sur le domaine D considéré :

1) $x^2,\ D = [-1, 2]$ **2)** $x^2 - 3x + 2,\ D = [0, 4]$ **3)** $\frac{1}{x},\ D = [-2, -1]$ **4)** $\frac{1}{x^2},\ D = [-1, 1] \setminus \{0\}$

5) $\cos x,\ D = [\frac{\pi}{4}, \pi]$ **6)** $\frac{5x+1}{13x+2},\ D = [0, 4]$ **7)** $\frac{2n+3}{2n-9},\ n \in \mathbb{N}$ **8)** $\frac{4n+1}{3n+7},\ n \in \mathbb{N}$

Exercice n° 11 (T)**

Démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in [1, 3],\ 2x^2 - 5x + 3 \leqslant 3x - 3$ **2)** $\forall x \in [1, +\infty[,\ \frac{2x^2 - 7x + 1}{x+3} \leqslant 10x$ **3)** $\forall x \leqslant 0,\ \sqrt{x^2 - x + 1} \geqslant -x$

Exercice n° 12 (*I)

Etudier le signe de $\sqrt{x^2+1} - x$ et $\sqrt{x^2+1} + x$ suivant les valeurs de x.

Exercice n° 13 (I)**

Démontrer (et mémoriser) les inégalités classique suivantes :

1) $\forall x \geqslant 0,\ \sin x \leqslant x$ **2)** $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1 + x$ **3)** $\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$

PROF: ATMANI NAJIB