

Généralités sur les fonctions

EXERCICE 1

Dans chacune des cas ci-dessous étudier si f et g sont égaux ?

$$1) \quad f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$$

$$2) \quad f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2 \quad ; \quad g(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x-1})^2$$

$$3) \quad f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$$

EXERCICE 2

On pose $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$ déterminer D_f et montrer que $(\forall x \in D) \quad 0 < f(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x|x|}{x^2 + 1}$

1) étudier la parité de f et montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad 0 \leq f(x) < 1$

2) en déduire que f est bornée

$$3) \text{ a) montrer que pour tous } x, y \text{ de } \mathbb{R}^+ \text{ } x \neq y \text{ on a : } \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{2(x + y)}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

b) étudier le sens de variation de f sur \mathbb{R}^+ puis déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R}^-

Exercice 4

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + x + 1}$

1) déterminer D_f et montrer que $(\forall x \in D_f) \quad f(x) \leq 1$ en déduire que f est bornée

2) f admet-elle une valeur minimale ? valeur maximale ?

$$3) \text{ a) montrer que } (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad f(x) - f(y) = \frac{(x-y)(1-xy)}{(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)}$$

b) étudier le sens de variation de f sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$

c) en déduire les variations de f sur $[-1,0]$ et $]-\infty,-1]$

Exercice 5

$$1) \text{ soit la fonction } f \text{ définie par : } f(x) = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Déterminer deux fonctions g et h telles que $f = g \circ h$ puis étudier le sens de variation de f

$$2) \text{ on considère la fonction } f \text{ telle que : } f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

Déterminer deux fonctions g et h telles que $f = g \circ h$ puis étudier le sens de variation de f

généralités sur les fonctions

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \frac{4}{x}$

- 1) Etudier la parité de f
- 2) Montrer que 4 est la valeur minimale de f sur $[0, +\infty[$
- 3) a) montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x) - f(y) = (x - y) \left(1 - \frac{4}{xy}\right)$
b) étudier le sens de variation de f sur $[0, 2]$ et $[2, +\infty[$
c) en déduire les variations de f sur \mathbb{R}^{*-}

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$

- 1) montrer que f admet sur $[0, +\infty[$ un extremum en $\frac{1}{2}$ dont on précisera la nature
- 2) a) montrer que $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) f(x) - f(y) = (x - y) \left(4(x + y) - \frac{1}{xy}\right)$
b) étudier les sens de variations de f sur les intervalles $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et $[-\infty, 0[$
c) en déduire que $\left(\forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right) f(x) \in [3, 5]$
- 3) on pose $g(x) = 4x|x| + \frac{1}{x}$
étudier la parité de g puis étudier les variations de g

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$

- 1) montrer que pour tous x ; y de \mathbb{R} et $x \neq y$ on a : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x^2 + y^2 + xy - 3$
- 2) étudier le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$; $[-\infty, -1]$ et $[-1, 1]$
- 3) soient a_n, \dots, a_2, a_1 des réels de \mathbb{R}^+ tels que : $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1$

Montrer que $(2 + a_1^3)(2 + a_2^3) \times \dots \times (2 + a_n^3) \geq 3^n$

- 4) soit h la fonction telle que : $h(x) = (x - 1)\sqrt{x + 2}$

Vérifier que $f(\sqrt{x + 2}) = h(x)$ en déduire les variations de h sur $[-1, +\infty[$ et $[-2, -1]$