

**EXERCICES FONCTIONS - Généralités**

**Exercice 1**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \cos(\pi x)$

- 1) Etudier la parité de la fonction  $f$
- 2) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2) = f(x)$
- 3) Dédire que la fonction  $f$  est périodique

**Exercice 2**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par

$$f(x) = |x-1| + |x+1|$$

- 1) Etudier la parité de la fonction  $f$
- 2) Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2$
- 3) Résoudre l'équation  $f(x) = 2$  et déduire une valeur minimale de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 3**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 + x$

- 1) Ecrire  $f(x)$  sous forme canonique
- 2) Vérifier que  $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq -\frac{1}{4}$
- 3) Résoudre l'équation  $f(x) = -\frac{1}{4}$  et déduire une valeur minimale de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

- 1) Déterminer  $D_f$ .
- 2) Etudier la parité de la fonction  $f$ .
- 3) Déterminer le signe de  $(f(x))^2 - 4$  et déduire que la fonction  $f$  admet une valeur maximale sur  $D_f$ .

**Exercice 5**

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) Vérifier que  $\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
- 3) Montrer que  $f$  est décroissante sur  $D_f$
- 4) Montrer que  $\forall x \in D_f \quad 0 < f(x) \leq 1$
- 5) Calculer  $f(-1)$  et déduire que 1 est une valeur maximale de la fonction  $f$  sur  $D_f$

**Exercice 6**

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = \sqrt{x-1}$

$$\text{Et } g(x) = \frac{x}{x+2}$$

- 1) Déterminer  $D_{f \circ g}$  et  $D_{g \circ f}$
- 2) Donner l'expression de  $(f \circ g)(x)$  pour tout  $x \in D_{f \circ g}$

**Exercice 7**

Ecrire la fonction  $f$  sous forme de la composée de deux fonctions  $u$  et  $v$  dans les cas suivants :

- 1)  $f(x) = \sqrt{1-2x}$
- 2)  $f(x) = (2x+1)^2$
- 3)  $f(x) = \frac{|x|-2}{|x|+3}$
- 4)  $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

**Exercice 8**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :

$$f(x) = 3x-5 \text{ et } g(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

- 1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 1 + \frac{x^2}{x^2+1}$
- 2) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2 - \frac{x^2}{x^2+1}$   
Et déduire que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq g(x) \leq 2$
- 3) La fonction  $f$  est-elle bornée sur  $\mathbb{R}$  ?
- 4) Montrer que la fonction  $g \circ f$  est bornée sur  $\mathbb{R}$
- 5) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2 \leq (g \circ f)(x) \leq 1$

**Exercice 9**

- 1) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(x) = x^2 + 2x$ 
  - a. Déterminer la monotonie de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$
  - b. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \geq 0$
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $g(x) = -1 + \sqrt{1+x}$ 
  - a. Déterminer la monotonie de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^+$
  - b. Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) \geq 0$ .
- 3) Calculer  $(f \circ g)(x)$  et  $(g \circ f)(x)$  ;  $\forall x \in \mathbb{R}^+$ .
- 4) Représenter dans la même repère orthonormée  $(C_f)$  et  $(C_g)$   
Et la droite d'équation  $y = x$ .

**Exercice 10**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2\cos x - x$

- 1) a) montrer pour tout  $x$  de  $I = [0; \pi] \quad -\pi - 2 \leq f(x) \leq 2$   
b) étudier la monotonie de la fonction  $x \mapsto \cos x$  sur l'intervalle  $I$ .  
c) déduire la monotonie de la fonction  $f$ .
- 2) On pose :  $g(x) = f(4x)$   
Etudier la monotonie de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$
- 3) On pose :  $h(x) = (2\cos x - x)^2$ 
  - a. Déterminer une fonction  $u$  vérifiant  $h = u \circ f$ .
  - b. Déterminer la monotonie de sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ .