

## Généralités sur les fonctions

### Sens de variation d'une fonction

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

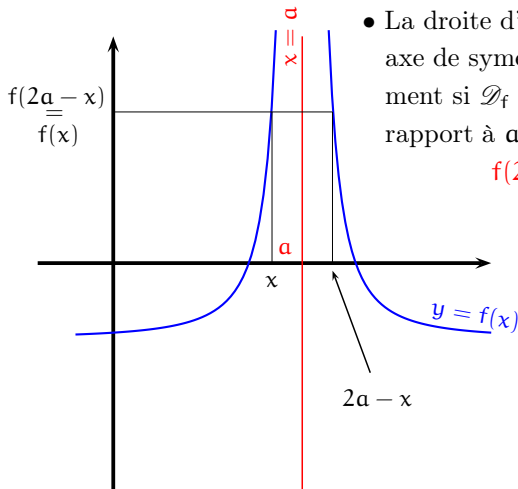
- $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$  alors  $f(a) \leq f(b)$ .  
 $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a \leq b$  alors  $f(a) \geq f(b)$ .
- $f$  est strictement croissante sur  $I$  si et seulement si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) < f(b)$ .  
 $f$  est strictement décroissante sur  $I$  si et seulement si pour tous réels  $a$  et  $b$  de  $I$ , si  $a < b$  alors  $f(a) > f(b)$ .
- $f$  est monotone sur  $I$  si et seulement si  $f$  est croissante sur  $I$  ou  $f$  est décroissante sur  $I$ .  
 $f$  est strictement monotone sur  $I$  si et seulement si  $f$  est strictement croissante sur  $I$  ou  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .

### Extrema des fonctions

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0$  un réel de  $I$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum global en  $x_0$  (ou encore que  $f(x_0)$  est le maximum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ ) si et seulement si pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ .  
On dit que  $f$  admet un minimum global en  $x_0$  (ou encore que  $f(x_0)$  est le minimum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ ) si et seulement si pour tout réel  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- On dit que  $f$  admet un maximum local en  $x_0$  (ou encore que  $f(x_0)$  est un maximum local de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ ) si et seulement si il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $x_0$  tel que, pour tout réel  $x$  de  $I \cap J$ , on a  $f(x) \leq f(x_0)$ .  
On dit que  $f$  admet un minimum local en  $x_0$  (ou encore que  $f(x_0)$  est le minimum de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ ) si et seulement si il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $x_0$  tel que, pour tout réel  $x$  de  $I \cap J$ , on a  $f(x) \geq f(x_0)$ .

### Symétries, fonction paires et impaires

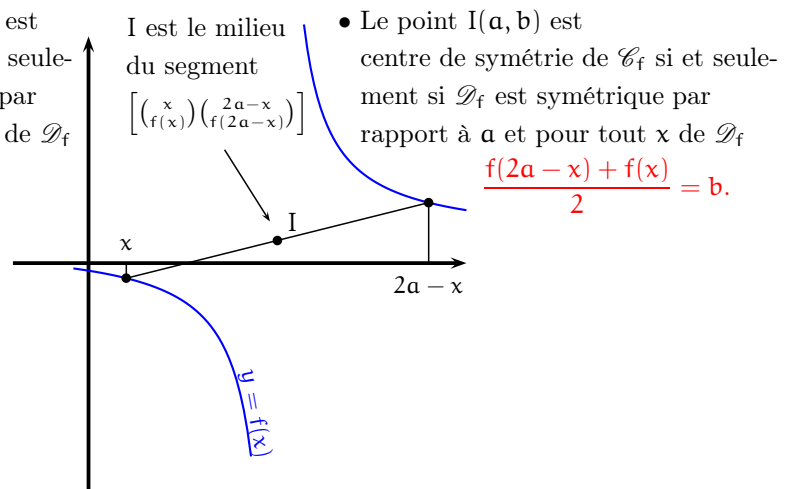


- La droite d'équation  $x = a$  est axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  si et seulement si  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à  $a$  et pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_f$   
 $f(2a - x) = f(x)$ .

- Il revient au même de dire que pour tout réel  $h$  tel que  $a + h$  est dans  $\mathcal{D}_f$ , on a

$$f(a - h) = f(a + h)$$

- Quand  $a = 0$  et que  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à  $0$ , on a pour tout réel  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ ,  $f(-x) = f(x)$ .  $f$  est alors dite **paire** et l'axe  $(Oy)$  est axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .



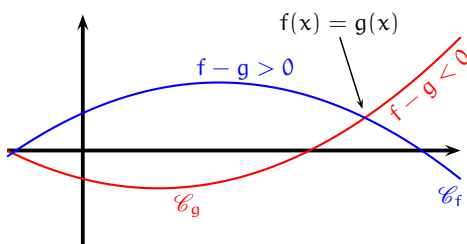
- Le point  $I(a, b)$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$  si et seulement si  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à  $a$  et pour tout  $x$  de  $\mathcal{D}_f$   
 $\frac{f(2a - x) + f(x)}{2} = b$ .

- Il revient au même de dire que pour tout réel  $h$  tel que  $a + h$  est dans  $\mathcal{D}_f$ , on a

$$\frac{f(a - h) + f(a + h)}{2} = b$$

- Quand  $a = 0$  et que  $\mathcal{D}_f$  est symétrique par rapport à  $0$ , on a pour tout réel  $x$  de  $\mathcal{D}_f$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .  $f$  est alors dite **impaire** et le point  $O$  est centre de symétrie de  $\mathcal{C}_f$ .

### Positions relatives de courbes. Intersection de courbes



- Les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont les abscisses des points d'intersection de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .
- Le signe de  $f - g$  fournit les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  :
  - si  $f - g \geq 0$  sur  $I$   $\mathcal{C}_f$  est au-dessus de  $\mathcal{C}_g$  sur  $I$ ,
  - si  $f - g \leq 0$  sur  $I$   $\mathcal{C}_f$  est au-dessous de  $\mathcal{C}_g$  sur  $I$ .