*Résumé de Cours*

**PROF : ATMANI NAJIB** **1BAC SM**

# FONCTIONS - *Généralités*

## 1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

**1-1) Définition :**

Une ***fonction*** est un procédé qui à un nombre *x* appartenant à un ensemble D associe un nombre y.

On note : $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

**1-3) Domaine de définitions :** Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f que l'on notera $D_f$

## 2) Fonctions paires et Fonctions impaires

**2.1. Fonction paire :** On dit qu'une fonction *f* est paire si et seulement si :a) Pour tout réel *x*, si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$

b) Pour tout réel *x* de $D_f$, on a : $f(-x) = f(x)$

**2.3. Fonction impaire :** On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

a) Pour tout réel *x*, si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$

b) Pour tout réel *x* de $D_f$, on a : $f(-x) = -f(x)$

**2.4 le graphe et la parité de la fonction**

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

## 3) Les variations d'une fonction numérique

**3-1) Sens de variation d'une fonction :fonction croissante -décroissante -fonction constantes**

Soit f une fonction et $D_f$ son domaine de définition et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$

- Dire f que est strictement croissante sur $I$ ( croissante sur $I$ ) signifie que : Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

*Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».*

- Dire f que est strictement décroissante sur $I$ ( décroissante sur $I$ ) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

*Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».*

- Dire f que est constante sur $I$ signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$

alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle $I$ est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur $I$ soit décroissante sur $I$

**Propriété :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ .On dit que f est constante sur $I$ ssi il existe un réel $k$ tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

**3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :**

**Propriété :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I$

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur $I$ ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0$

**3-3) les variations et la parité :**

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit $I'$ le symétrique de l'intervalle $I$

Si f est paire alors :

- f est croissante sur $I$ ssi f est décroissante sur $I'$
- f est décroissante sur $I$ ssi f est croissante sur $I'$

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur $I$ ssi f est croissante sur $I'$
- f est décroissante sur $I$ ssi f est décroissante sur $I'$

**Conséquences :**

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur $D_f$

## 4) Les variations des deux fonctions : αf et f+α

**Propriété :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur $I$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur $I$
- f et α+f ont les mêmes variations sur $I$

## 5) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) et Fonctions majorées ; minorées et bornée

### 6-1) Comparaison de fonctions

**Définition 1** : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement
si : Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g = \mathbb{R}$
et Pour tout $x \in D_f$ : f (x) = g(x) et On écrit : $f = g$

**6-2) Définitions :** Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies Sur I. On dit que :
1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$. On note : $f \leq g$ Sur I.
2)f est positive sur I lorsque : $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
On note : $f \geq 0$ sur I.
3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$
4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$
5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$.
(f est majorée et minorée)

**Interprétation graphique :**
1) $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe $(C_g)$ de la fonction $g$ est au-dessus de La courbe $(C_f)$ de $f$ sur l'intervalle $I$
2) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe $(C_f)$ de la fonction $f$ est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle $I$

## 6) Les extremums d'une fonction numérique

**7-1)) Définitions :** Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I$ et soit $a \in I$

- Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur $I$ (ou $f(a)$ est un maximum de f sur $I$) ssi pour tout que $\forall x \in I : f(x) \leq f(a)$
- Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur $I$ (ou $f(a)$ est un minimum de f sur $I$) ssi pour tout $\forall x \in I$ : $f(x) \geq f(a)$

## 7) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

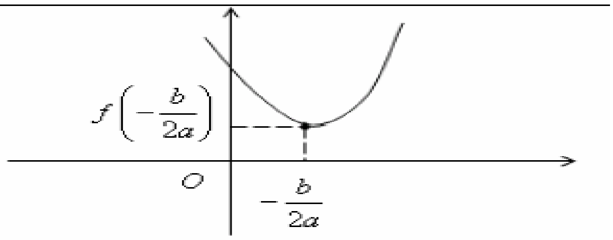
**7-1)Résumé :** $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

1° Dans le repére $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de $f$

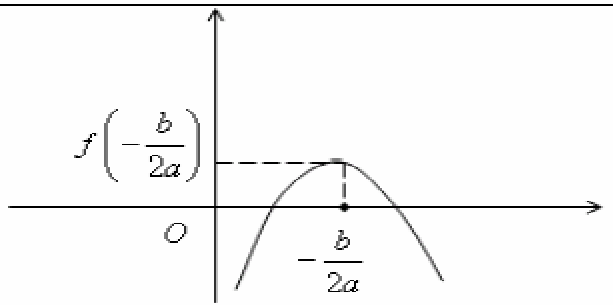
Si $a \succ 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ | $\nearrow$ |




Si $a \prec 0$

| $x$ | $-\infty$ | $-\dfrac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ | $\searrow$ |




**7-2) Exemple :**

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

on a $f$ est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ $\left(f(x) = ax^2 + bx + c\right)$

Donc $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{4}{2\times 2} = 1$ et $\left(f(1) = 2 - 4 - 2 = -4\right)$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$$

Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repére $(0; \vec{i}; \vec{j})$ l

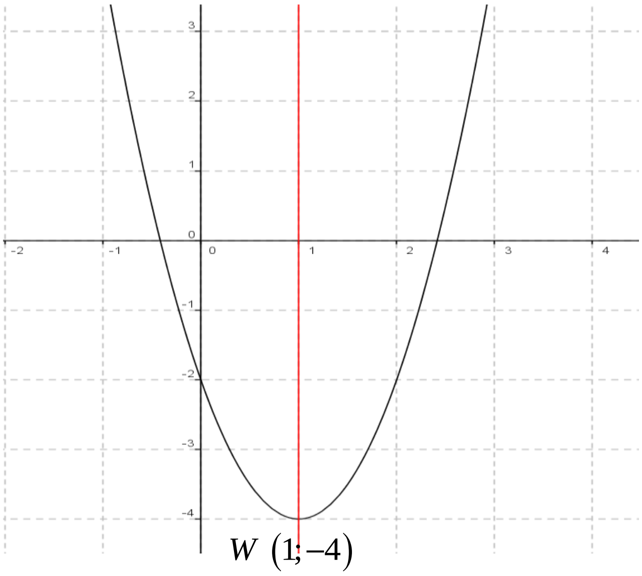
a courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$

et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de $f$

On a $a = 2 \succ 0$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ |




$W(1;-4)$

## 8) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\quad a \neq 0$ et $c \neq 0$

**8-1)Résumé et propriété :** 1)Soit f une fonction tq :

$f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $cx + d \neq 0$ ssi

$x \neq -\dfrac{d}{c}$ donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ $(C_f)$ est l'hyperbole de centre

$W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations

respectives $x = -\dfrac{d}{c}$ et $y = \dfrac{a}{c}$

**1iér cas :** si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\Vert$ | $\nearrow$ |

**2iér cas :** si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \prec 0$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{d}{c}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ |

**8-2) Exemples :**

**Exemple1:** Soit f une fonction numérique tq :

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x - 1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 \prec 0$

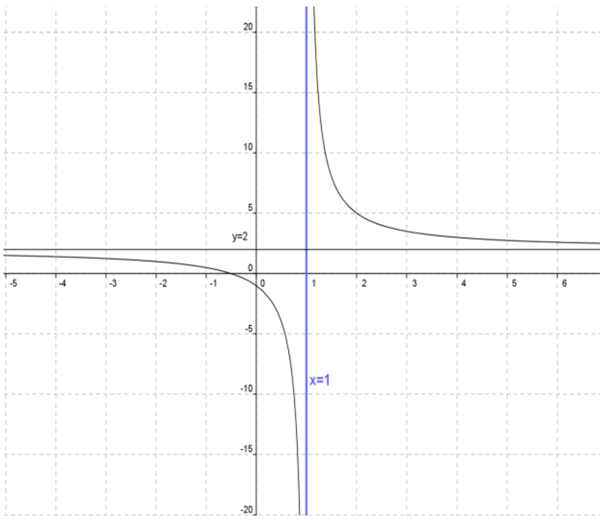
• Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1}$

| $x$ | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ |

• Représentation graphique

| -2 | 1- | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | -1 | | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 |

$(C_f)$ est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 1$ et $y = 2$




## 9) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

**Exemple :** Soit f une fonction numérique définie par :

$f(x) = \dfrac{1}{4}x^3$

1) Déterminer $D_f$

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

**3)**tracer la dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

**Solutions :** 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

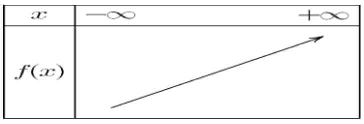
2)soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

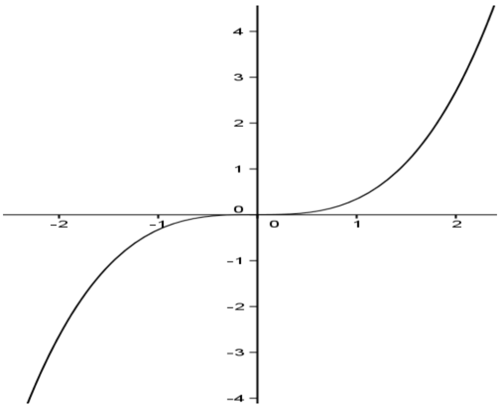
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation




| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 6.5 | -2 | -1/4 | 0 | 1/4 | 2 | 6.5 |



## 10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

**Exemple :**Soit f une fonction numérique définie par :

$f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer $D_f$

2)étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

**3)**tracer la dans le repére $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_f\right)$ de f

**Solutions :** 1)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2,+\infty[$

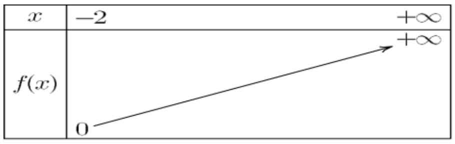
2)soient $x_1 \in [-2;+\infty[$ et $x_2 \in [-2;+\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ Donc : $\sqrt{x_1+2} < \sqrt{x_2+2}$

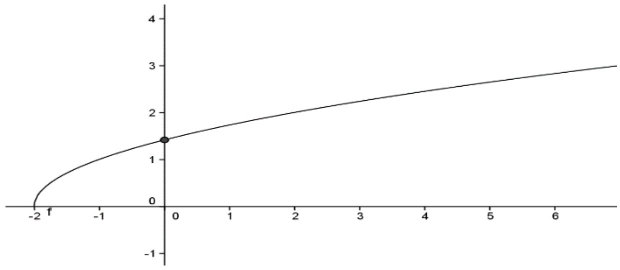
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :




| $x$ | -2 | -1 | 0 | 2 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | 3 |



## 11) Fonction Partie entière

**12-1)Définition :** Soit $x$ un nombre réelle

La partie entière de $x$ est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$.

Notation : La partie entière de $x$ est maintenant notée :

$E(x)$ **ou** $[x]$

**Exemples :** $E(4,2) = 4$ ; $E(-3,75) = -4$ ;

**12-2)Propriétés :**1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $E(x) \leq x \prec E(x)+1$

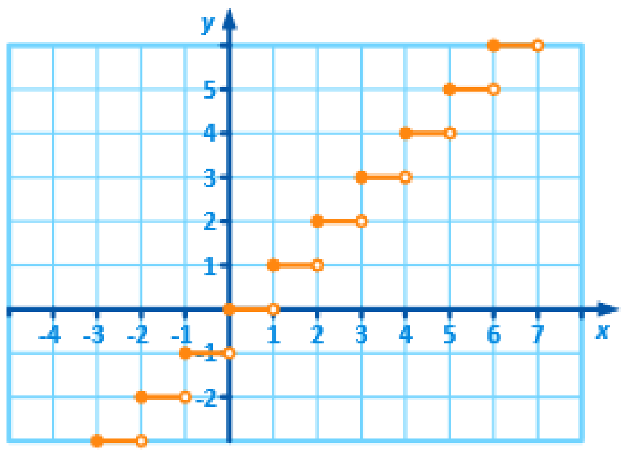
2) $\forall x \in \mathbb{Z}$ $E(x) = x$

Un nombre x est entier si et seulement si il est égal à sa partie entière

2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ $E(x+n) = n + E(x)$

**12-3) représentation graphique de la fonction** $x \to E(x)$ **:**

$\forall k \in \mathbb{Z}$ Si $k \leq x \prec k+1$ alors $E(x) = k$ donc Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



## 12)La composée de deux fonctions

**12-1) Définition :** Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :

$\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté : $g \circ f$ définie sur I par : $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$

On peut alors faire le schéma suivant :

$x \rightarrow f(x) = y \rightarrow g(f(x)) = z$

**Remarque :** 1)La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2)Soit Df et Dg les ensembles de définition des fonctions f et g. $D_{g\circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f et f(x) \in D_g \right\}$

**12-2) Variations d'une fonction composée**

**Théorème :** Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f (I).

➪ Si f et g ont même variation respectivement sur I et f (I) alors la fonction $g \circ f$ Est croissante sur I.

➪ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f (I) alors là fonction $g \circ f$ est décroissante sur I.

## 13) Fonctions périodiques :

**Définition** :On considère une fonction réelle f dont on note $D$ l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période $T$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x \in D$ on a $x + T \in D$

b) $\forall x \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réelle strictement positif qui vérifie les conditions

**Exemple de fonctions périodiques :**

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction $x \rightarrow E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T = 2\pi$

4.la fonction tangente est périodique de période $T = \pi$

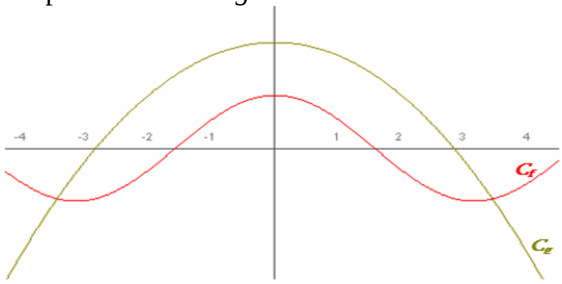
5. La période des fonctions: $f : x \rightarrow \cos(ax)$ et $f : x \rightarrow \sin(ax) \quad a \neq 0$ est $T = \dfrac{2\pi}{a}$

**Remarque :** La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

## 14) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

**1) Position relative de deux courbes et intersection**

Soient $(C_f)$ la courbe représentative de $f$ et $(C_g)$ la courbe représentative de $g$.




On a les relations suivantes :

$M(x;y) \in (C_f)$ ssi $y = f(x)$

$M(x;y) \in (C_g)$ ssi $y = g(x)$

Aux points d'intersection de $(C_f)$ et de $(C_g)$, on a $M \in (C_f)$ et $M \in (C_g)$ donc soit $f(x) = g(x)$

**A retenir :**

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de $(C_f)$ et de $(C_g)$
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situées au-dessus de $(C_g)$ .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situées au- dessous de $(C_g)$

**Un cas particulier :**

équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de $(C_f)$ avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de $(C_f)$ situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$ .

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »*
*Dit un proverbe.*
*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*
*Que l'on devient un mathématicien*

***Prof : Atmani najib***