

## I. RAPPELS :

### A. Fonction numérique :

#### a. Définition :

- Toute relation  $f$  qui associe chaque élément  $x$  de  $\mathbb{R}$  par un élément au plus  $y$  de  $\mathbb{R}$  est appelée  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
**fonction numérique de la variable réelle  $x$**  on note  $x \mapsto f(x)$ .
- Tous les éléments  $x$  de  $\mathbb{R}$  qui ont images par  $f$  constituent un ensemble , on l'appelle ensemble de définition ( ou encore domaine de définition ) on le note  $D_f$  ou  $D$  .

### B. Fonction paire – fonction impaire :

#### a. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .

- ( $f$  est **paire** sur  $D_f$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = f(x) \end{cases}$ .
- ( $f$  est **impaire** sur  $D_f$ )  $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f, -x \in D_f \\ \forall x \in D_f, f(-x) = -f(x) \end{cases}$ .

### C. Monotonie d'une fonction numérique :

#### a. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est une fonction croissante (**strictement croissante**) sur  $I$   $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$   
 $(\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) < f(x'))) .$  ( le sens de l'inégalité ne change pas )
- $f$  est une fonction décroissante (**strictement décroissante**) sur  $I$   
 $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x'))$  ( $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; x < x' \Rightarrow f(x) > f(x'))$  . ( le sens de l'inégalité change )
- $f$  est une fonction constante sur  $I$   $\Leftrightarrow (\forall x, x' \in I; f(x) = f(x'))$ .

#### b. Remarque :

- $D_f = I \cup I'$  tel que  $I$  et  $I'$  sont symétrique par rapport à zéro .
- Si  $f$  est paire ou impaire sur  $D_f = I \cup I'$  alors il suffit d'étudier  $f$  sur  $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$  on l'appelle ensemble de d'étude ( ou domaine d'étude ).
- Si  $f$  est paire sur  $D_f = I \cup I'$  alors les variations de  $f$  sont opposées sur  $I$  et  $I'$ .
- Si  $f$  est impaire sur  $D_f = I \cup I'$  alors les variations de  $f$  sont les même sur  $I$  et  $I'$ .

### D. Extrêums d'une fonction :

#### a. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $x_0 \in D_f$  .

- $f(x_0)$  est valeur maximale absolue de  $f$  (  $f$  admet valeur maximale absolue au point  $x_0$  ) si et seulement si :  $\forall x \in D_f, f(x) \leq f(x_0)$  .
- $f(x_0)$  est valeur minimale absolue de  $f$  (  $f$  admet valeur minimale absolue au point  $x_0$  ) si et seulement si :  $\forall x \in D_f, f(x_0) \leq f(x)$  .

### E. Applications :

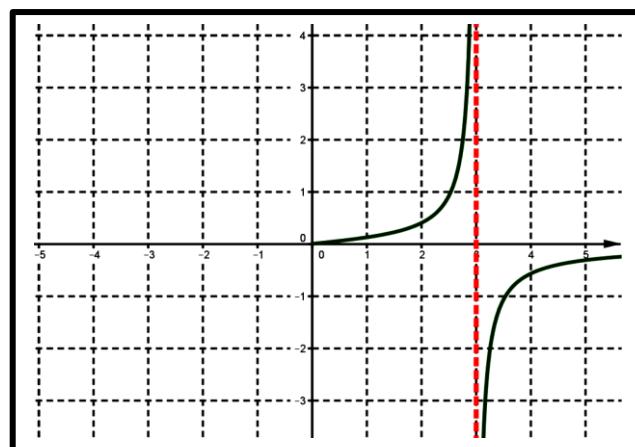
- Application 1 :

I. Compléter le tableau de variation et la courbe de la fonction  $f$  sachant que  $f$  est :

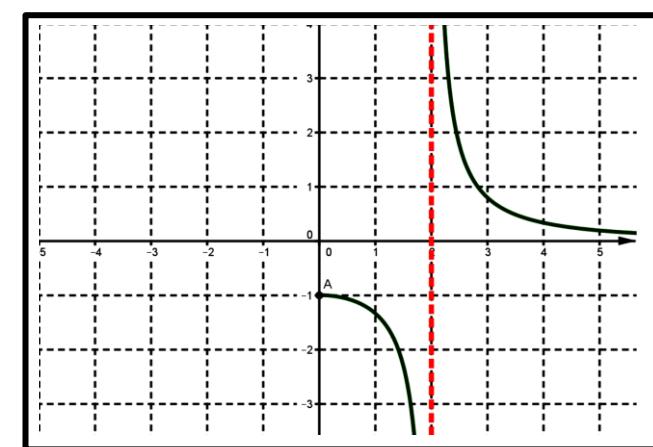
a.  $f$  est paire sur  $D_f$  (cas n° 1)

b.  $f$  est impaire sur  $D_f$  (cas n° 2)

X	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f(x)$			0 ↗		↗



X	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f(x)$			-1 ↘		↘



2. Que représente  $f(0)$  pour la fonction pour le cas n° 1.

- Application 2 :

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

I. Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de  $f$ .

2. Etudier la parité de  $f$ . On déduit l'ensemble  $D_E$  d'étude de  $f$ .

3. Etudier la monotonie de  $f$  sur  $[0, 1[$  puis sur  $]1, +\infty[$ .

4. On déduit la monotonie de  $f$  sur  $]-1, 0]$  puis sur  $]-\infty, -1[$ .

5. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $D_E$  puis sur  $D_f$ .

6. Est-ce que  $f$  admet un extremum ? à déterminer.

## II. A ajouter complément :

### A. Extremums relatives :

a. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $x_0 \in D_f$ .

- $f(x_0)$  est valeur maximale relative de  $f$  ( $f$  admet valeur maximale relative au point  $x_0$ ) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert  $I_{x_0}$  de centre  $x_0$  tel que  $I_{x_0} \subset D_f$  on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x) \leq f(x_0).$$

- $f(x_0)$  est valeur minimale relative de  $f$  ( $f$  admet valeur minimale relative au point  $x_0$ ) si et seulement si : il existe un intervalle ouvert  $I_{x_0}$  de centre  $x_0$  tel que  $I_{x_0} \subset D_f$  on a :

$$\forall x \in I_{x_0}, f(x_0) \leq f(x).$$

## B. Taux d'accroissement d'une fonction $f$ :

### a. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur l'intervalle  $I$ .

$x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x \neq x'$  le nombre  $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$  s'appelle le taux d'accroissement de la fonction  $f$  entre  $x$  et  $x'$ , on note  $T_f$ .

### b. Application :

Calculer le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  tel que :  $f(x) = 2x$ .

### c. Propriétés :

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

- Si  $T_f \leq 0$  alors la fonction  $f$  est décroissante sur  $I$ .
- Si  $T_f < 0$  alors la fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $I$ .
- Si  $T_f \geq 0$  alors la fonction  $f$  est croissante sur  $I$ .
- Si  $T_f < 0$  alors la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- Si  $T_f = 0$  alors la fonction  $f$  est constante sur  $I$ .

## C. Fonction périodique :

### a. Activité :

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$ . On prend  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

1. Placer sur l'axe des abscisses  $x$  et  $x+3$ .

2. Déterminer graphiquement  $f(x)$  puis  $f(x+3)$ .

3. Quelle remarque peut-on tirer ?

### b. Vocabulaire :

On a  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+3) = f(x)$  on dit que la fonction  $f$  est périodique sur  $\mathbb{R}$  et son période est 3 on note :  $T = 3$  ou  $P = 3$ .

### c. Définition :

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$  tel que  $T \in \mathbb{R}^{+*}$  ( $T > 0$ ).

la fonction  $f$  est périodique sur  $D_f$  et son période est  $T$  si et seulement si :

- $x \in D_f \Rightarrow (x+T \in D_f \text{ et } x-T \in D_f) . (1)$
- $\forall x \in D_f : f(x+T) = f(x) . (2)$

### d. Remarque :

- $T$  le plus petit réel strictement supérieur à 0 qui vérifie la relation (2).
- $f(x) = \sin x$  et  $f(x) = \cos x$  sont périodique de période  $T = 2\pi$ .
- $f(x) = \tan x$  est périodique de période  $T = \pi$ .

### e. Application :

- Montrer que  $f(x) = \sin ax$  (avec  $a \neq 0$ ) est une fonction périodique de période  $T = \frac{2\pi}{|a|}$ .
- $f$  est une fonction périodique de période  $T$  sur  $D_f$ . montrer que :

1.  $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x+nT) = f(x)$  .

2.  $\forall n \in \mathbb{N} ; \forall x \in D_f : f(x-nT) = f(x)$

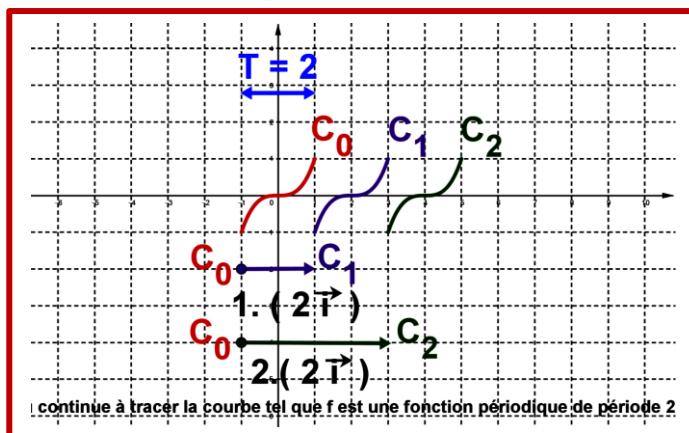
3. Quel propriété obtenue ?

**f. La courbe d'une fonction périodique :**

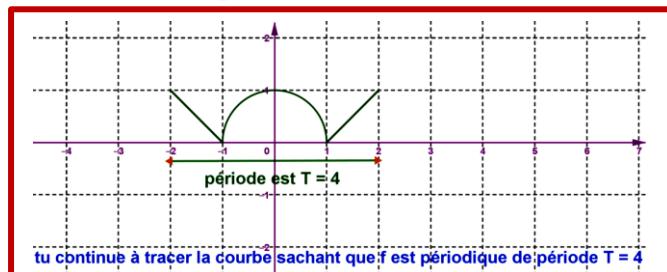
$f$  est une fonction périodique de période  $T$  sur  $D_f$  .

- On considère les ensembles suivants :  $I_k = [a+kT, a+(k+1)T] \cap D_f$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  .  
(  $[a+kT, a+(k+1)T]$  est un intervalle de longueur  $T$  ) .
- $C_k$  les courbes représentative de  $f$  sur  $I_k$  .
- Pour construire les courbes  $C_k$  , on construit d'abord  $C_0$  sur  $I_0 = [a, a+T] \cap D_f$  .
- Puis on translate la courbe  $C_0$  par des translations de vecteurs  $\vec{u} = kT\vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  .
- Exemples :

**Exemple n° 1**



**Exemple n° 2**



**III. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée - extrema d'une fonction  $f$  :**

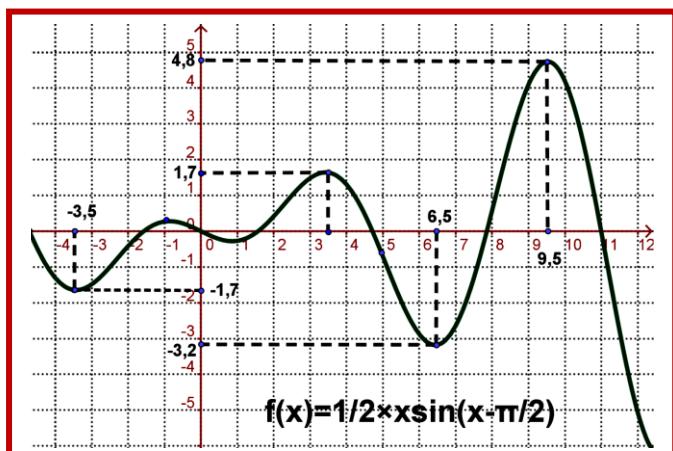
**A. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée :**

**a. Activité :**

La figure ci-contre présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$  .

Compléter par le symbole qui convient :

- 1.  $\forall x \in [-4;11] : f(x) \dots\dots 5$  .
- 2.  $\forall x \in [-4;11] : -4 \dots\dots f(x)$  .
- 3.  $\forall x \in [\dots,\dots] : -4 \dots\dots f(x) \dots\dots 5$  .



**b. Vocabulaire :** on dit que :

- La fonction  $f$  est majorée par 5 sur  $[-4,11]$  ( ou par 6 ..... ) .
- La fonction  $f$  est minorée par -4 sur  $[-4,11]$  ( ou par -7 ..... ) .
- La fonction  $f$  est bornée 5 sur  $[-4,11]$  .

**c. Définitions :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $I$  ( $I \subset D_f$ ).  $M$  et  $m$  de  $\mathbb{R}$ .

- La fonction  $f$  est majorée par  $M$  sur  $I$  si et seulement si :  $\forall x \in I ; f(x) \leq M$  (ou  $f(x) < M$ )
- La fonction  $f$  est minorée par  $m$  sur  $I$  si et seulement si :  $\forall x \in I ; m \leq f(x)$  (ou  $m < f(x)$ )
- La fonction  $f$  est bornée par  $M$  sur  $I$  si et seulement si :  $f$  est majorée et minorée sur  $I$ .
- **Remarque :** (La fonction  $f$  est bornée sur  $I$ )  $\Leftrightarrow (\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \in I : |f(x)| \leq A)$ .

**d. Applications :**

❖  $f$  est une fonction tel que son tableau de variation (ci-contre) :

1.  $f$  est elle majorée ?  $f$  est elle minorée ?  
 $f$  est elle bornée ? sur  $[-3, +\infty[$ .

X	-3	0	5	9	$+\infty$
$f(x)$		7		-6	
	-1		-14		-12

2. Que représente 7 puis -14 pour la fonction  $f$  sur  $[-3, 11]$  ?

3. Que représente 7 puis -6 pour la fonction  $f$  ?

❖  $f$  est une fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x}$  sur  $I = [1; +\infty[$ .

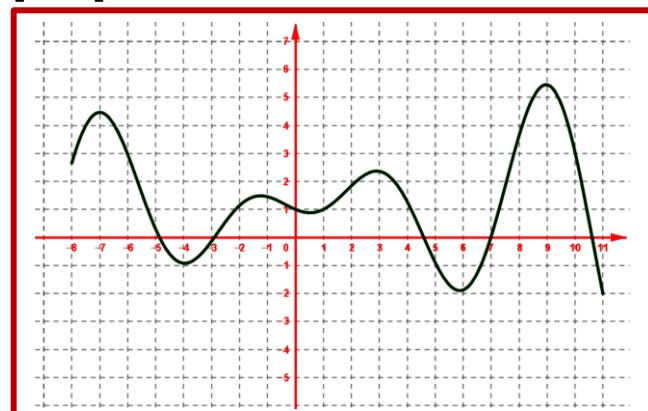
1. Montrer que :  $f$  est majorée par 1 sur  $I$ .

2. Montrer que :  $f$  est minorée sur  $I$ .

3. Est-ce que  $f$  est bornée sur  $I$ .

❖ La figure ci-contre représente la courbe d'une fonction  $f$

1. Est-ce que  $f$  est majorée ?  $f$  est minorée ?  
 $f$  est bornée ? sur  $[-8, 11]$ .



## IV. Comparaison de deux fonctions et interprétation géométrique

### A. Fonction positive – fonction négative :

**a. Activité :**

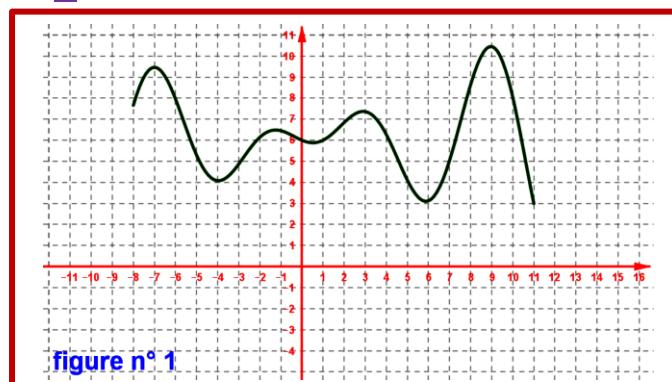


Figure n° 1

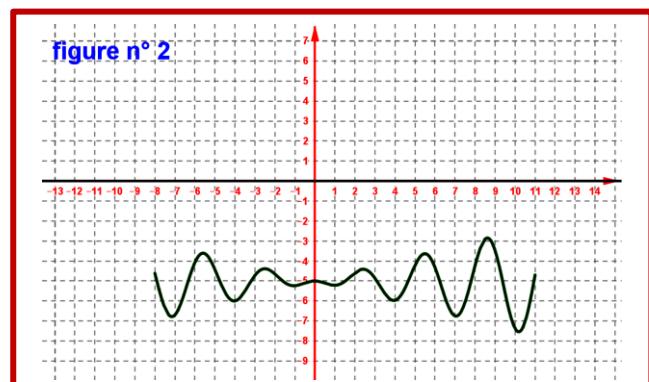


Figure n° 2

- La figure n° 1 représente une fonction positive sur  $[-8, 11]$ .
- La figure n° 2 représente une fonction négative sur  $[-8, 11]$ .

1. Quelle remarque peut-on tirer ?

2. Exprimer la remarque on utilise des symboles .

**b. Définition :**

- $f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $D_f$ .
- $f$  est une fonction positive sur  $D_f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f : f(x) \geq 0$ . la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située au dessus de l'axe des abscisses .
- $f$  est une fonction strictement négative sur  $D_f$  si et seulement si  $\forall x \in D_f : f(x) < 0$  . la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située strictement au dessous de l'axe des abscisses .

**B. Comparaison de deux fonctions :**

**a. Activité :**

La figure ci-contre n° 3 présente la courbe d'une fonction  $f$  définie sur  $D_f$ .

- On dit que : la fonction  $f$  est inférieure ou égale à la fonction  $g$  sur  $[-1, +\infty[$  .
- On dit que : la fonction  $f$  est strictement supérieure à la fonction  $g$  sur  $[-1, +\infty[$  .

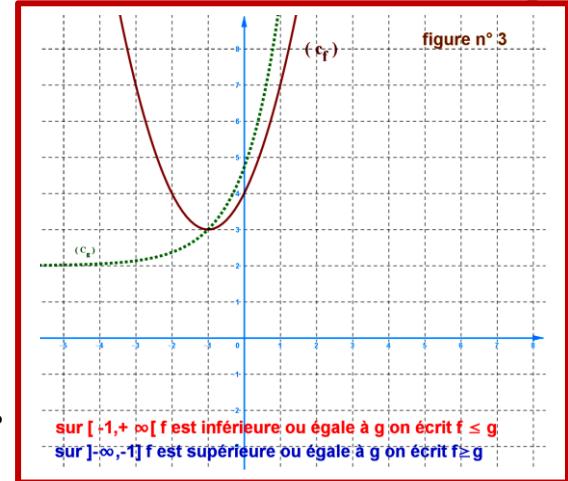
**1.** Exprimer les propositions présentes par des symboles .

**2.** Que peut-on dire pour le cas de la fonction  $f$  est égale à  $g$  ?

**b. Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $I$ .

- $(f \leq g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) \leq g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située au dessous de la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sur  $I$ .
- $(f > g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) > g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  est située strictement au dessus de la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sur  $I$ .
- $(f = g \text{ sur } I) \Leftrightarrow (\forall x \in I : f(x) = g(x))$  .  
la courbe  $(C_f)$  de  $f$  et la courbe de  $(C_g)$  de  $g$  sont confondues sur  $I$ .



**V. Composée de deux fonctions :**

**a. Activité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x + 3$  ;  $g(x) = x^2 + 1$  .

**1.** Déterminer  $D_f$  puis  $D_g$  .

**2.** Calculer  $f(1)$  ;  $g(5)$  ; puis écrire  $g(5)$  en fonction de  $f$  et 1 .

**3.** Calculer  $g(f(3))$  puis  $g(f(x))$  .

**b. Vocabulaire – notation :**

- La fonction  $h : x \mapsto h(x) = g(f(x))$  on la note par  $h = g \circ f$  d'où :  $h(x) = g \circ f(x) = g(f(x))$ .
- La fonction  $g \circ f$  est appelée la composée de la fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre .
- Pour  $g \circ f$  on considère le diagramme suivant :

$$h = g \circ f : D_f \xrightarrow{f} f(D_f) \subset D_g \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) \in D_g \mapsto g(f(x)) = g \circ f(x) = h(x)$$

**c. Définition :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

On pose :  $D_{gof} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$ .

La fonction  $h$  définie sur  $D_{gof}$  par  $h(x) = g(f(x))$  est appelée la composée de  $f$  et  $g$  dans cet ordre et on note  $h = g \circ f$ .

**d. Application :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :  $f(x) = 2x^2 + 3x$  ;  $g(x) = 5x - 7$ .

**1.** Déterminer  $D_{gof}$  puis  $D_{fog}$ .

**2.** Calculer :  $g \circ f$  puis  $f \circ g$ .

**3.** Calculer :  $g \circ f(2)$  puis  $f \circ g(2)$ . que remarquez-vous ?

## VI. Monotonie de : $f+c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec $c$ de $\mathbb{R}^*$ - $g \circ f$ :

### A. Monotonie de : $f+c$ et $c.f$ et $f \circ g$ avec $c$ de $\mathbb{R}^*$ .

**a. Activité :**

$f$  est une fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie sur  $I$ .

$T_f$  est le taux d'accroissement de la fonction  $f$  sur  $I$ .

**1.** Déterminer  $T_h$  le taux d'accroissement de la fonction  $h(x) = f(x) + c$  sur  $I$ . (avec  $c \in \mathbb{R}$ ).

**2.** Déterminer  $T_g$  le taux d'accroissement de la fonction  $g(x) = c \times f(x)$  sur  $I$ . (avec  $c \in \mathbb{R}$ ).

**3.** Donner la propriété obtenue.

**Correction :**

**1.** Calculons  $T_h$ :

Soient :  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x' \neq x$ .

$$\text{On a : } T_h = \frac{h(x) - h(x')}{x - x'} = \frac{f(x) + c - (f(x') + c)}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = \frac{f(x) - f(x)}{x - x'} = T_f.$$

D'où :  $T_h = T_{f+c} = T_f$

**Conclusion :**  $f$  et  $f+c$  varient dans le même sens sur  $I$  (ont même sens de variation sur  $I$ ).

**2.** Calculons  $T_g$ :

Soient :  $x$  et  $x'$  de  $I$  tel que  $x' \neq x$ .

$$\text{On a : } T_g = \frac{g(x) - g(x')}{x - x'} = \frac{c \times f(x) - c \times f(x')}{x - x'} = \frac{c \times (f(x) - f(x'))}{x - x'} = c \times T_f. \text{ D'où } T_g = T_{c \times f} = c \times T_f$$

**Conclusion :**

- Si  $c > 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  varient dans le même sens sur  $I$ .
- Si  $c < 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  leurs variations sont opposées sur  $I$ .

**b. Propriété :**

$T_f$  est le taux d'accroissement d'une fonction  $f$  sur  $I$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

- Les fonctions  $f$  et  $f+c$  varient dans le même sens sur  $I$  (ont même sens de variation sur  $I$ )
- Si  $c > 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  varient dans le même sens sur  $I$ .
- Si  $c < 0$  alors  $f$  et  $c \times f$  leurs variations sont opposées sur  $I$ .

## **B. Monotonie de : $g \circ f$**

### **a. Activité :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ . ( c.à.d.

$$\forall x \in D_f ; f(x) \in f(D_g)$$

**1.** Montrer que si  $f$  et  $g$  varient dans le même sens respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est croissante sur  $D_f$ .

**2.** Montrer que si  $f$  et  $g$  leurs variations sont opposées respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est strictement décroissante sur  $D_f$ .

**3.** Donner la propriété obtenue.

### **b. Propriété :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement sur  $D_f$  et  $D_g$  et  $f(D_f) \subset D_g$ .

- si  $f$  et  $g$  ont même monotonie (**strictement monotone**) respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est croissante sur  $D_f$  ( **$g \circ f$  est strictement croissante sur  $D_f$** ).
- si  $f$  et  $g$  ont monotonie (**strictement monotone**) opposées respectivement sur  $D_f$  et  $f(D_f) \subset D_g$  alors  $g \circ f$  est décroissante sur  $D_f$  ( **$g \circ f$  est strictement décroissante sur  $D_f$** ).

### **c. Application :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies respectivement par :  $f(x) = |x| + 5$  et  $g(x) = x^2$ .

**1.** Déterminer  $D_f$  puis  $D_g$ .

**2.** Etudier la monotonie de  $f$  et  $g$ .

**3.** Déterminer la monotonie de  $g \circ f$  sur  $\mathbb{R}$  à travers un tableau.

## VII. Etude et représentation graphique de certain fonctions :

### **A. Etude et représentation graphique de $x \mapsto ax^2 + bx + c$ ( polynôme du deuxième degré ).**

#### **a. Activité :**

$f$  est une fonction définie par :  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a$  et  $b$  et  $c$  de  $\mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .

$$\text{On a : (1)} : f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

$$\text{D'où : } f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : (1)} &\Leftrightarrow f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + f\left(-\frac{b}{2a}\right) \\ &\Leftrightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 ; (2). \end{aligned}$$

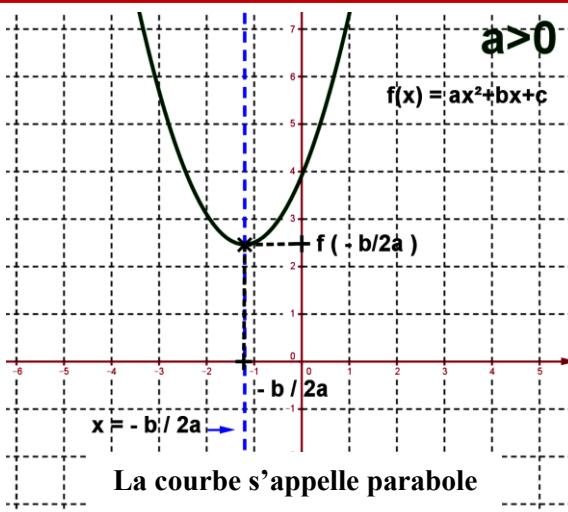
1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \\
 &\Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) \geq 0 \\
 &\Rightarrow f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2a}\right) \\
 &\Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) \leq f(x)
 \end{aligned}$$

- Donc :  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  est la valeur minimale absolue pour  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Tableau de variation de  $f$  est :  $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

- La courbe représentative de  $f$  est :



❖ Vocabulaire :

- $f(x) = ax^2 + bx + c ; a > 0$
- La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet  $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ .
- Son axe de symétrie est la droite  $(D)$  d'équation :
- $(D) : y = -\frac{b}{2a}$

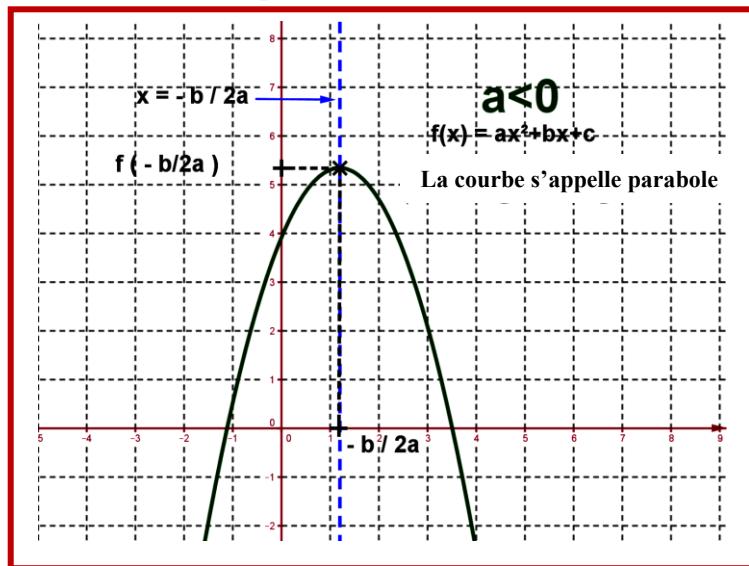
2<sup>ième</sup> cas  $a < 0$  :

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow f(x) - f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 \leq 0 \\
 &\Rightarrow f(x) \leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)
 \end{aligned}$$

- Donc :  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$  est la valeur maximale absolue pour  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Tableau de variation de  $f$  est :  $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

- La courbe représentative de  $f$  est :



❖ Vocabulaire :

- $f(x) = ax^2 + bx + c ; a < 0$
- La courbe obtenue est appelée parabole , orienté vers le bas de sommet  $S\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ .
- Son axe de symétrie est la droite  $(D)$  d'équation :  $(D) : y = -\frac{b}{2a}$

**b. Application :**

- $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ .

- Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$ .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  .
- Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**Correction :**

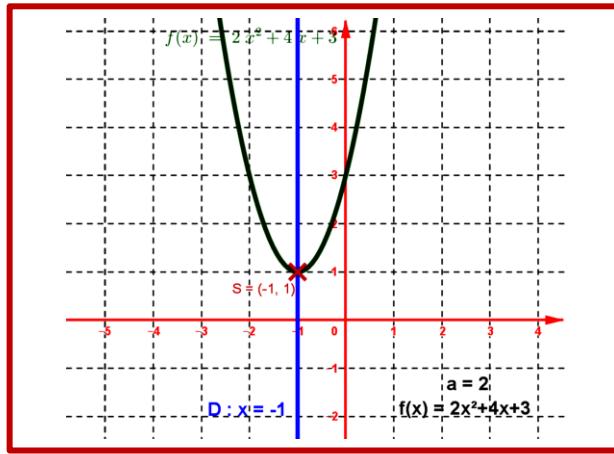
**1.** Les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$  .

- La courbe de  $f$  est appelée parabole , orienté vers le haut de sommet  $S(-1, 1)$  .
- Son axe de symétrie est la droite  $(D)$  d'équation :  $(D) : y = 2$  .

**2.** Le tableau de variation de  $f$  .

$x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(-1) = 1$	$\nearrow$

**3.** On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = -x^2 + 4x$ .

1. Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe ( $C_f$ ) de  $f$ .

2. Dresser le tableau de variation de  $f$  et Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ ).

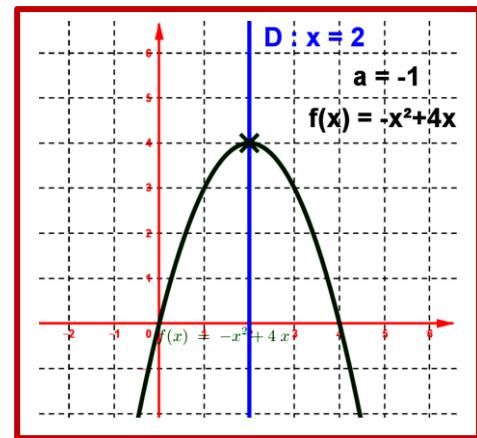
**Correction :**

1. Les éléments caractéristiques de la courbe ( $C_f$ ) de  $f$ .

- La courbe de  $f$  est appelée parabole, orienté vers le bas de sommet  $S(2,4)$ .
- Son axe de symétrie est la droite ( $D$ ) d'équation : ( $D$ ) :  $y = -1$ .

2. Le tableau de variation de  $f$  et On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé ( $O, \vec{i}, \vec{j}$ )

x	-∞	2	+∞
$f(x)$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(2) = 4$		



B. Etude et représentation graphique de ( $a \neq 0$ ) ;  $f(x) = ax^3$ .

a. Activité :

$f$  est une fonction définie par :  $f(x) = ax^3$  avec et  $a \neq 0$ .

- Ensemble de définition est  $D_f = \mathbb{R}$ . ( car  $f$  est une fonction polynomiale).
- $f$  est une fonction impaire car  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a(-x)^3 = -ax^3 = f(-x)$ .
- Ensemble d'étude est :  $D_E = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$ .
- La monotonie de  $f$  : soient  $x$  et  $x'$  de  $D_E$  tel que  $x < x'$  on a (1) :  $x < x' \Rightarrow x^3 < (x')^3$

1<sup>er</sup> cas  $a > 0$  :

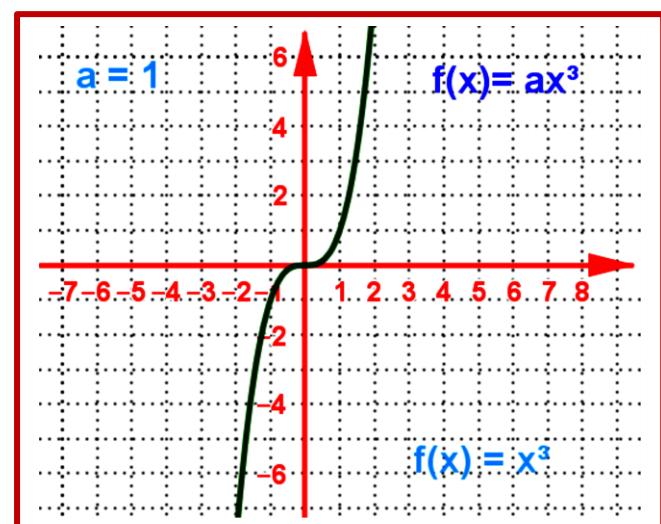
$$(1) \Rightarrow ax^3 < a(x')^3 \\ \Rightarrow f(x) < f(x')$$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $D_E = \mathbb{R}^*$

et aussi sur  $\mathbb{R}^-$  car la fonction est impaire.

- Le tableau de variation de  $f$  et la courbe représentative de  $f$  est

x	-∞	0	+∞
$f(x)$		0	



1<sup>er</sup> cas  $a < 0$  :

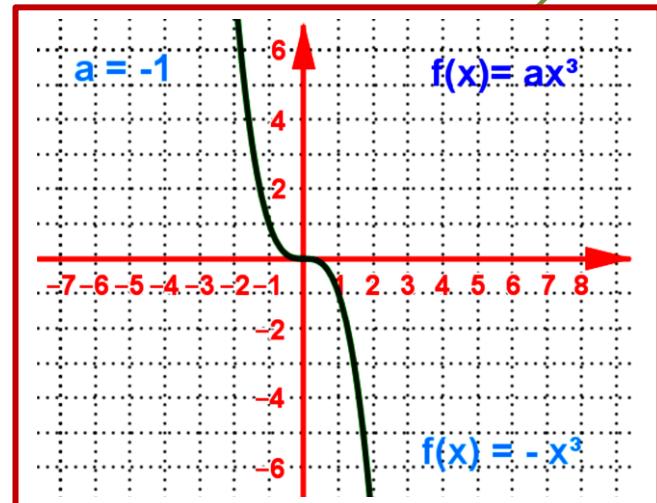
$$(1) \Rightarrow ax^3 > a(x')^3$$

$$\Rightarrow f(x) > f(x')$$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $D_E = \mathbb{R}^*$  et aussi sur  $\mathbb{R}^-$  car la fonction est impaire .

- Le tableau de variation de  $f$  et la courbe représentative de  $f$  est :

x	-∞	0	+∞
$f(x)$	0		



**b. Application :**

❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ .

1. Dresser le tableau de variation de  $f$  .

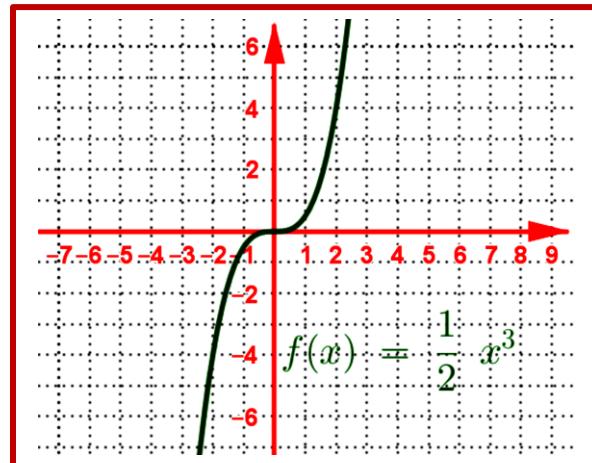
2. Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**Correction :**

1. Le tableau de variation de  $f$  est :

x	-∞	0	+∞
$f(x)$		0	

2. On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



❖  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = -\frac{2}{3}x^3$ .

**1.** Dresser le tableau de variation de  $f$  .

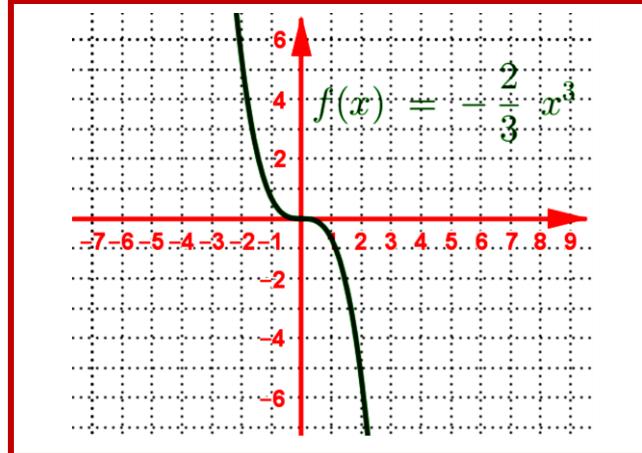
**2.** Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**Correction :**

**1.** Le tableau de variation de  $f$  est :

x	-∞	0	+∞
$f(x)$		0	

**2.** On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



**C.** Etude et représentation graphique de la fonction homographique :  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( $c \neq 0$ ) .

- Ensemble de définition :

On a :  $x \in D_f \Leftrightarrow cx + d \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{d}{c}$$

$$\text{D'où : } D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} = \left[ -\infty, -\frac{d}{c} \right] \cup \left[ -\frac{d}{c}, +\infty \right].$$

- La monotonie de  $f$  : soient  $x$  et  $x'$  de  $D_E$  tel que  $x \neq x'$  .

on a :

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} \quad ; (x \neq x') \\ &= \frac{\frac{ax+b}{cx+d} - \frac{ax'+b}{cx'+d}}{x - x'} \\ &= \frac{(ax+b)(cx'+d) - (ax'+b)(cx+d)}{(cx+d)(cx'+d)} \\ &= \frac{adx+bcx'-adx'-bcx}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')} \end{aligned}$$

$$= \frac{x(ad-bc) - x'(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')}$$

$$= \frac{(ad-bc)(x-x')}{(cx+d)(cx'+d)(x-x')} = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)(cx'+d)} = \frac{\Delta}{(cx+d)(cx'+d)} ; \left( \Delta = ad-bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right)$$

- On a le signe de  $(cx+d)(cx'+d) > 0$  sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et de même sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .

D'où le signe de  $T_f$  est le signe de  $\Delta = ad-bc$  donc la monotonie de  $f$  sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et de même sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$  dépend du signe de  $\Delta = ad-bc$ .

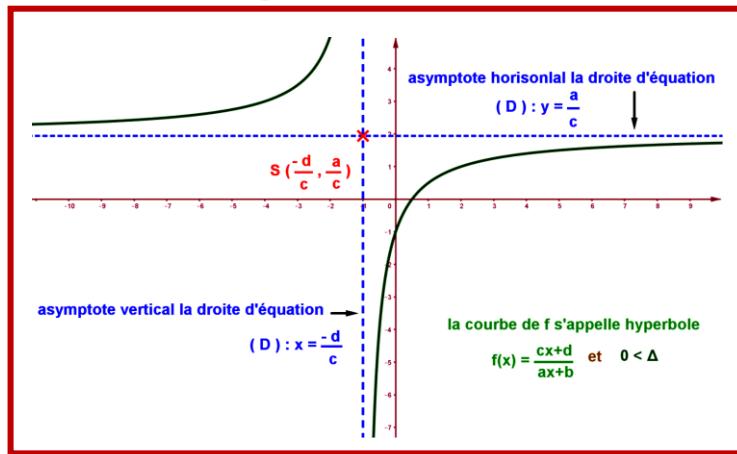
1<sup>er</sup> cas  $\Delta = ad-bc > 0$  : donc  $T_f > 0$ .

- D'où  $f$  est strictement croissante sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et aussi sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .
- Le tableau de variation de  $f$  est :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f	↗		↗

$\Delta > 0$

- La courbe représentative de  $f$  est :



#### Vocabulaire :

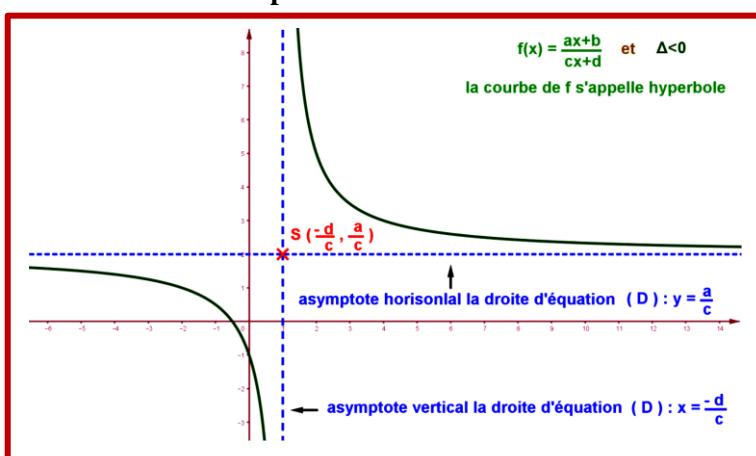
- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( $c \neq 0$ ) ;  $\Delta = ad-bc > 0$
- La courbe obtenue est appelée hyperbole .
- Son centre de symétrie est  $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$  .
- Asymptote verticale est la droite  $(D_v)$  d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c}$ .
- Asymptote horizontale est la droite  $(D_h)$  d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c}$

2<sup>ième</sup> cas  $\Delta = ad-bc < 0$  : donc  $T_f < 0$ .

- D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $\left] -\frac{d}{c}, +\infty \right[$  et aussi sur  $\left] -\infty, -\frac{d}{c} \right[$ .
- Le tableau de variation de  $f$  est :

$\Delta < 0$	x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
f(x)		↘		↘

- La courbe représentative de  $f$  est



**Vocabulaire :**

- $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ; ( $c \neq 0$ ) ;  $\Delta = ad - bc < 0$
- La courbe obtenue est appelée hyperbole .
- Son centre de symétrie est  $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$  .
- Asymptote verticale est la droite (D)  
d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c}$ .
- Asymptote horizontale est la droite (D)  
d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c}$

**c. Application :**

♦  $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ .

- Déterminer les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$  .
- Dresser le tableau de variation de  $f$  .
- Construire la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

**Correction :**

- Les éléments caractéristiques de la courbe  $(C_f)$  de  $f$  .

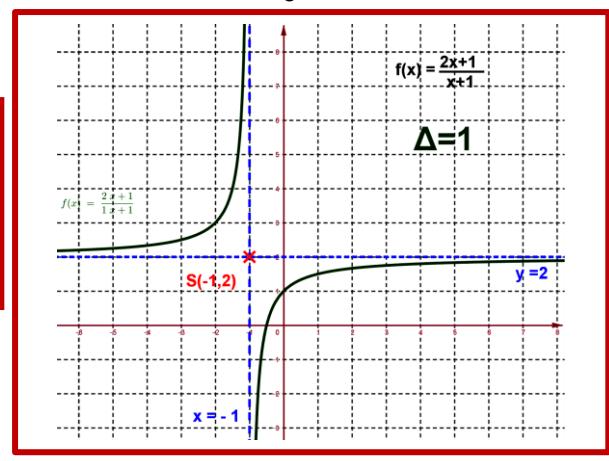
- On a  $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1 > 0$
- La courbe de  $f$  est un hyperbole .
- Son centre de symétrie est  $\Omega\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right) = \Omega(-1, 2)$  .
- Asymptote verticale est la droite  $(D_v)$  d'équation :  $D_v : x = -\frac{d}{c} = -1$ .
- Asymptote horizontale est la droite  $(D_h)$  d'équation :  $D_h : y = \frac{a}{c} = 2$ .
- 

- Le tableau de variation de  $f$  .

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c} = -1$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\parallel$	$\nearrow$

$\Delta > 0$

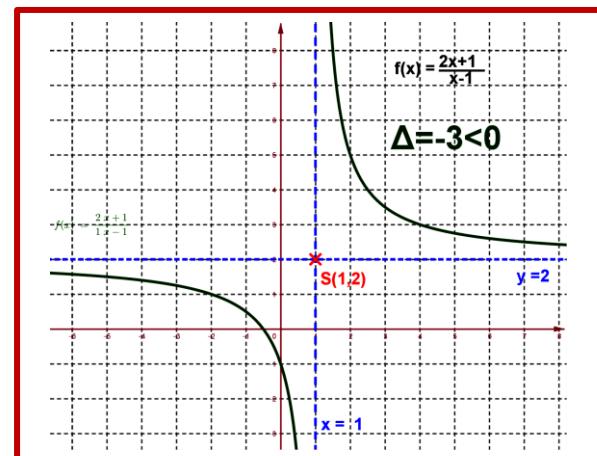
- On construit la courbe de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .



- $f$  est une fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ .

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c} = 1$	$+\infty$
$f(x)$	↓		↓

$\Delta < 0$



#### D. Etude et représentation graphique de la fonction $f(x) = \sqrt{x+a}$ :

- $f$  est définie sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .
- Monotonie de  $f$  sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .  
soient  $x$  et  $x'$  de  $D_f = [-a, +\infty[$  tel que  $x < x'$ .  
on a :  

$$x < x' \Rightarrow 0 \leq x+a < x'+a$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{x+a} < \sqrt{x'+a}$$

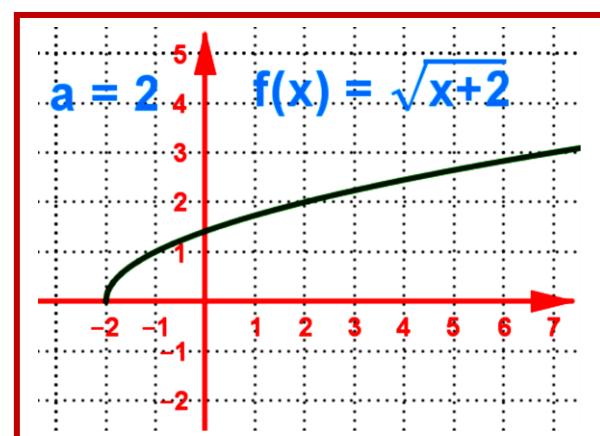
$$\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x')$$

D'où  $f$  est strictement croissante sur  $D_f = [-a, +\infty[$ .

- Le tableau de variation de  $f$  .

$x$	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	0	↗

- La courbe représentative de  $f$  est :



Cas :  $f(x) = \sqrt{a-x}$

- $f$  est définie sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .
- Monotonie de  $f$  sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .  
soient  $x$  et  $x'$  de  $D_f = ]-\infty, a]$  tel que  $x < x'$ .  
on a :  $x < x' \leq a \Rightarrow -a \leq -x < -x'$ 

$$\Rightarrow 0 \leq -x+a < -x'+a$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{-x+a} < \sqrt{-x'+a}$$

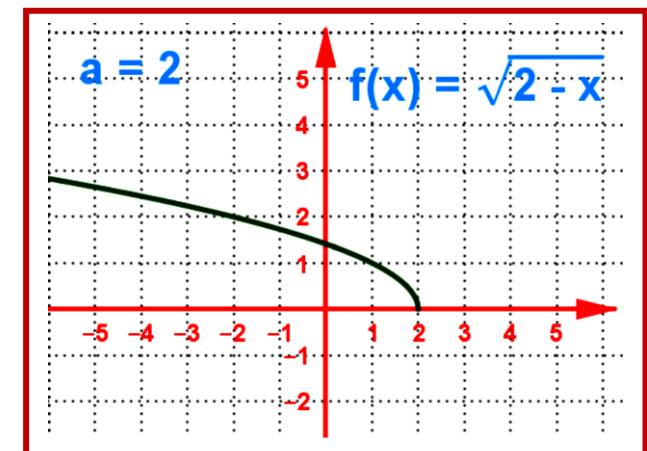
$$\Rightarrow 0 \leq f(x) < f(x')$$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $D_f = ]-\infty, a]$ .

- Le tableau de variation de  $f$  .

x	$-\infty$	a
$f(x)$	0	

- La courbe représentative de  $f$  est :



### A. Fonction la partie entière $f(x) = E(x)$

#### a. Activité :

Soit  $x$  de  $\mathbb{R}$ . Compléter le tableau suivant on détermine le nombre entier relatif  $p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) tel que  $p \leq x < p+1$

x	.....	4,55	0,78	-0,78	-4,55	.....
p						

#### b. Vocabulaire :

Le nombre entier relatif s'appelle la partie entière relative du nombre réel  $x$ , on note  $p = E(x)$  ou encore  $p = [x]$ .

#### c. Définition :

Soit  $x$  de  $\mathbb{R}$ .

Le nombre entier relatif  $p$  qui vérifie  $p \leq x < p+1$  s'appelle la partie entière relative du nombre réel  $x$ , on note  $p = E(x)$  ou encore  $p = [x]$ .

Donc :  $E(x) \leq x < E(x)+1$

#### d. Propriété :

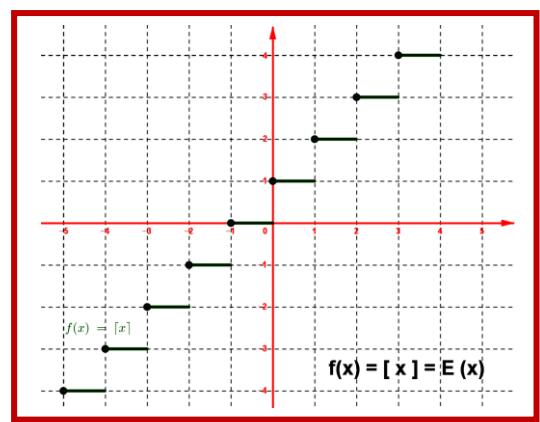
- $\forall x \in I_p = [p, p+1[ : f(x) = [x] = E(x) = p.$
- $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow E(x) = x.$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; E(x) \leq x < E(x)+1.$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} : E(x+k) = E(x)+k.$
- $\forall x \in \mathbb{R} ; x-1 < E(x) \leq x.$

- La courbe représentative de  $f$  est :

#### e. Application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- f est une fonction définie par :  $x \mapsto f(x) = 2x - E(x)$



- On considère les intervalles  $I_k$  tel que  $I_k = [k, k+1[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Détermine  $f(x)$  tel que  $x \in I_k$ .
- Construire  $C_0$  la courbe de  $f$  sur  $I_0 = [0, 1[$ . puis Construire  $C_k$  la courbe de  $f$  sur  $I_k = [k, k+1[$ .