GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) ACTIVITES ET RAPPELLES

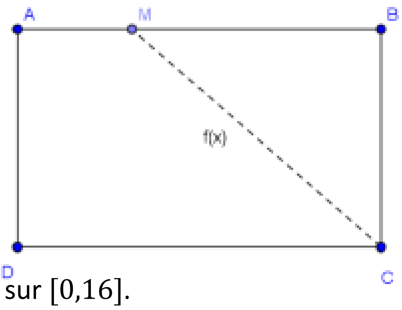
1.1 Ensemble de définition

Activités 1:

Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1. $f(x) = \frac{2\sqrt{x+1}}{3x^2+x-4}$
2. $g(x) = \frac{\sqrt{2x+1}+3x}{\sqrt{x-x^2}}$
3. $h(x) = \frac{tanx}{2sinx+1}$
4. $k(x) = \frac{3x+1}{x-E(x)}$
5. $u(x) = \sqrt{E(x)-x}$
6. $v(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{1-x}$.

Activité 2 :



Soit $ABCD$ un rectangle tel que : $AB = 5cm$ et $BC = 3cm$

M un point qui part de A et se déplace sans arrêt sur $ABCD$; considérons $f(x)$ la distance MC.

1- Calculer : $f(0), f(5), f(13)$ et $f(16)$.

2- a) Déterminer graphiquement les variation de f sur $[0,16]$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,16]$.

c) Déterminer –suivant le tableau de variation- les extremums de la fonction f sur $[0,16]$.

3- Montrer que la restriction de f sur des intervalles de $[0,16]$, sont des fonctions affines et déterminer ses expressions.

4- Ecrire les expressions de $[0,5]$ et sur $[13,16]$.

5- a) Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(f(x+16) = f(x))$

b) Déterminer $f(100), f(1000)$ et $f(2017)$.

Activité 3 :

Soit $$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{x^2+1}{|x|-1}$$

1- Déterminer $\mathcal{D}_f$.

2- Etudier la parité de f.

3- Donner la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

4- Déterminer les variations de f sur $[0,1[$ sur $]1; \quad 1+\sqrt{2}]$ et sur $[1+\sqrt{2}, +\infty[$.

5- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

II) NOTIONS DE BASE

1) Ensemble de définition

Définition :(fonction)

On appelle **fonction numérique à variable réel** toute relation d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ tel que chaque élément x de E à **au plus une image dans $\mathbb{R}$.**
Si $f(x) = y$ alors :
- y est l'image de x par la fonction f
- x est l'antécédent de y par la fonction f.

<u>Définition :</u>(Ensemble de définition d'une fonction)

> Soit f une fonction numérique à variable réel de E dans $\mathbb{R}$, les éléments de E qui ont une image par f forment un ensemble qu'on appelle ensemble de définition de f et on le note :$\mathcal{D}_f$
>
> $$\boldsymbol{\mathcal{D}_f = \{x \in E / f(x) \in \mathbb{R}\}}$$

<u>Exercice :</u>

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x+1}}) \end{array}$

<u>Remarque :</u>

Si f est une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f$, l'application définie de $\mathcal{D}_f$ vers $\mathbb{R}$ s'appelle **l'application associée à la fonction f.**

2) Représentation graphique d'une fonction.

<u>Définition :</u>(Graphe d'une fonction)

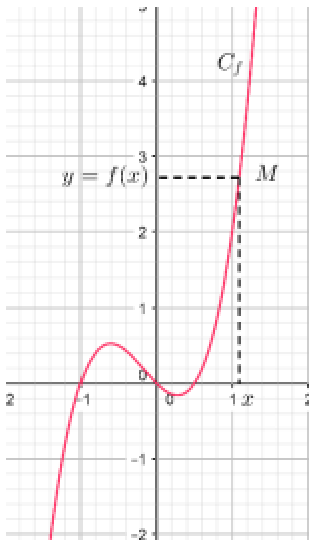
> Soit f une fonction numérique à variable réel, **le graphe de la fonction f** est l'ensemble des couples $(x, f(x))$ tels que $x \in D_f$; on le note : $\mathcal{G}_f$.
>
> $$\boldsymbol{\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) / \ x \in D_f\}}$$

Si le plan est rapporté à un repère (souvent orthogonal), chaque couple du graphe de f peut être représenté par un point M, l'ensemble des points ainsi définie forme une **courbe** dans le plan qu'on appelle **la courbe représentative de la fonction f,** ou encore **la représentation graphique de la fonction f** on la note par :$\boldsymbol{\mathcal{C}_f}$

<u>Définition :</u>

> Le plan étant rapporté à un repère $\mathcal{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ tels que $x \in D_f$.
>
> $$\boldsymbol{\mathcal{C}_f = \{M(x, f(x)) / \ x \in D_f\}}$$

$$M(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

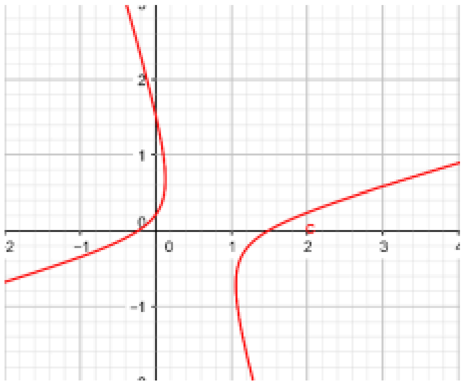


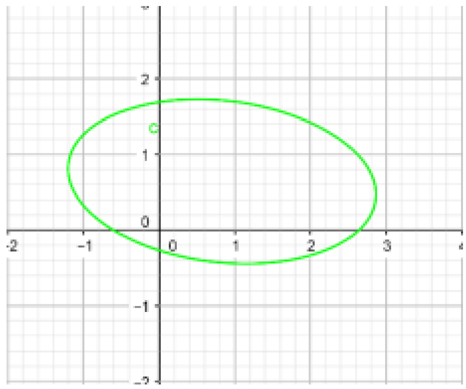
<u>Remarque :</u>

Pour qu'une courbe dans le plan soit une courbe d'une fonction numérique à variable réelle il faut et il suffit que **chaque parallèle à l'axe des ordonnées coupe cette courbe en au plus un point.**

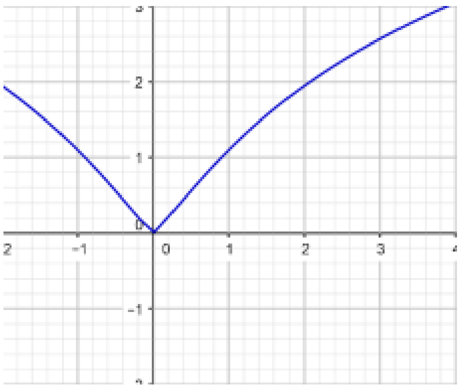
Exemples :

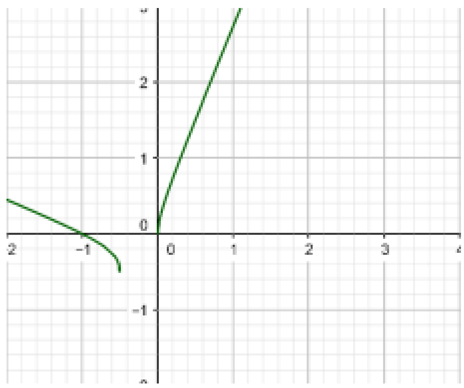
Les courbes suivantes ne sont pas les courbes des fonctions numériques à variable réelle.





Les courbes suivantes sont les courbes des fonctions numériques à variable réelle.





III) FONCTIONS : PAIRE ; IMPAIRE ; PERIODIQUE

1)Activités :

Activité :

Soit $\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 3x - E\left(3x+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$ où E désigne la partie entière.

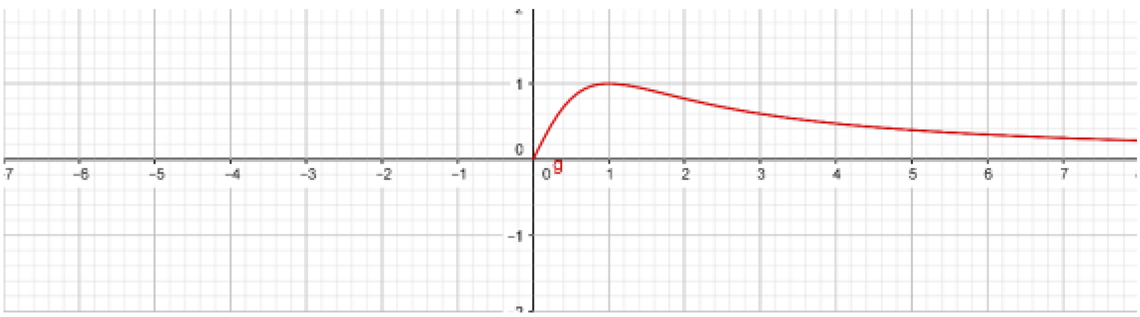
1- a) Supposons qu'il existe un réel T qui vérifie (P): $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+T) = f(x)$; montrer que $3T \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire la valeur p du plus petit réel strictement positif qui vérifie (P)

2- Inversement pour la valeur p trouvée en 1-b) : montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x)$)

Activité 2 :

Compléter la courbe ci-dessous de la fonction$h$ sachant que : $h(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.



Activité 3 :

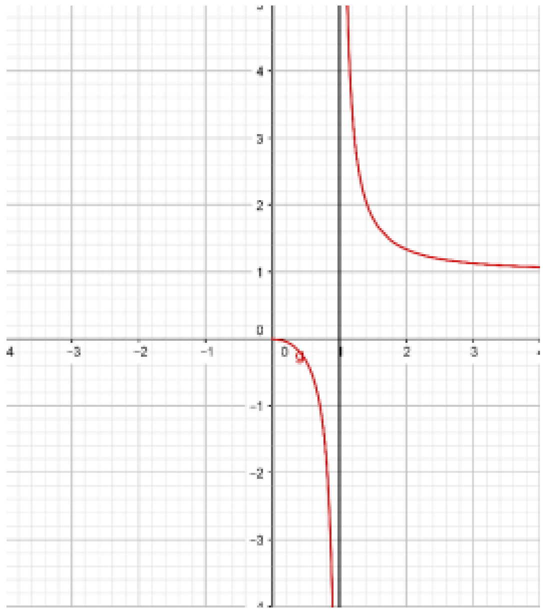
La courbe ci-contre est une partie de la courbe de la fonction

définie par : $h(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

1- Déterminer l'ensemble définition de la fonction h

2- Déterminer la nature de h.

3- Compléter la courbe C_h



2) Fonction paires, fonctions impaires

2.1 Fonction paire :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est paire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = f(x))$

Propriété :

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.**

Preuve : (en exercice)

2.2 Fonctions impaire :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est impaire si :

- $(\forall x \in \mathbb{R})(x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$
- $(\forall x \in D_f)(f(-x) = -f(x))$

Propriété :

La courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'origine du repère.**

Preuve : (en exercice).

3) Fonctions périodiques :

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, on dit que la fonction f est **périodique** s'il existe un réel T non nul qui vérifie :

- $(\forall x \in \mathbb{R})\left(x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x+T \in D_f \\ x-T \in D_f \end{cases}\right)$
- $(\forall x \in D_f)(f(x+T) = f(x))$

Tout réel T qui vérifie la définition s'appelle **une période de la fonction f.**

Le plus petit réel p **strictement positif** qui vérifie la définition s'appelle **la période de la fonction f.**

Exemples :

- Dans l'activité précédente : $\begin{array}{l} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right) \end{array}$ f est périodique de période $\frac{1}{3}$
- Soit la fonction $\begin{array}{l} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{sin(2x)}{cos(2x)+1} \end{array}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

2- Montrer que la fonction g est périodique et déterminer sa période.

Propriété :

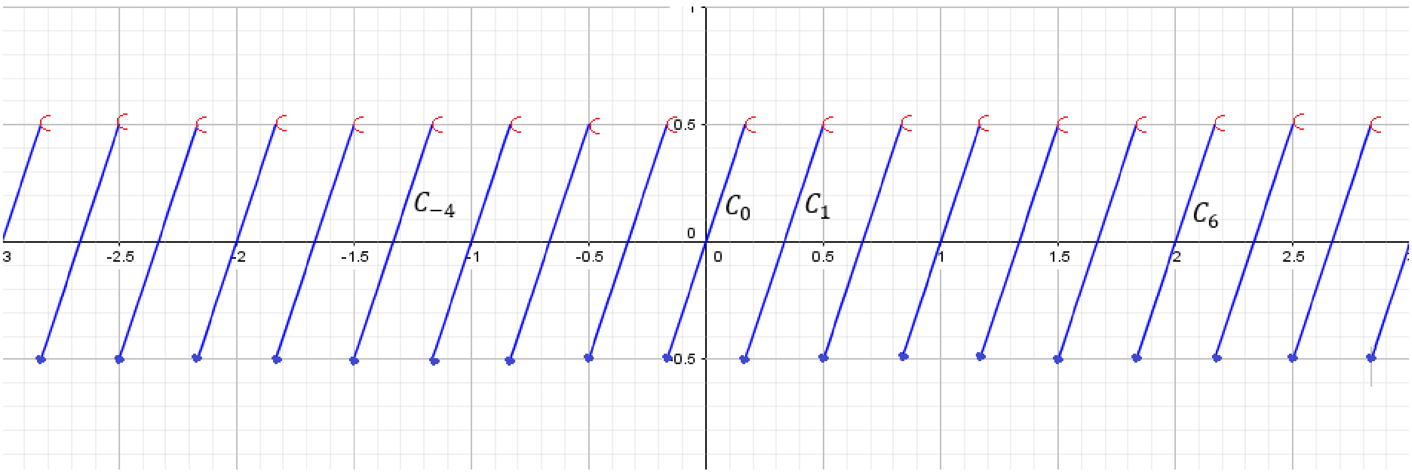
Si f est une fonction périodique de période T alors pour tout k dans $\mathbb{Z}$, kT est une période de f.

Exercice : Démontrer par récurrence sur k la propriété précédente.

Envisager deux cas : $k = n$ et $k = -n$ où n est un entier naturel.

Courbe d'une fonction périodique :

Activité : La courbe ci-dessous est la courbe de la fonction $f(x) = 3x - E\left(3x + \frac{1}{2}\right)$ qui est périodique de période $\frac{1}{3}$



C_k est la courbe représentative de la restriction de la fonction f sur $D_k = [\frac{-1}{6} + k \times \frac{1}{3} ; \frac{1}{6} + k \times \frac{1}{3}[$

1- Quelle est la longueur de D_k.

2- Déterminer graphiquement les transformations qui transforment C_0 en C_1, en C_6 et $C_{(-4)}$

3- Conjecturer la transformation qui transforme C_0 en C_k.

Théorème :

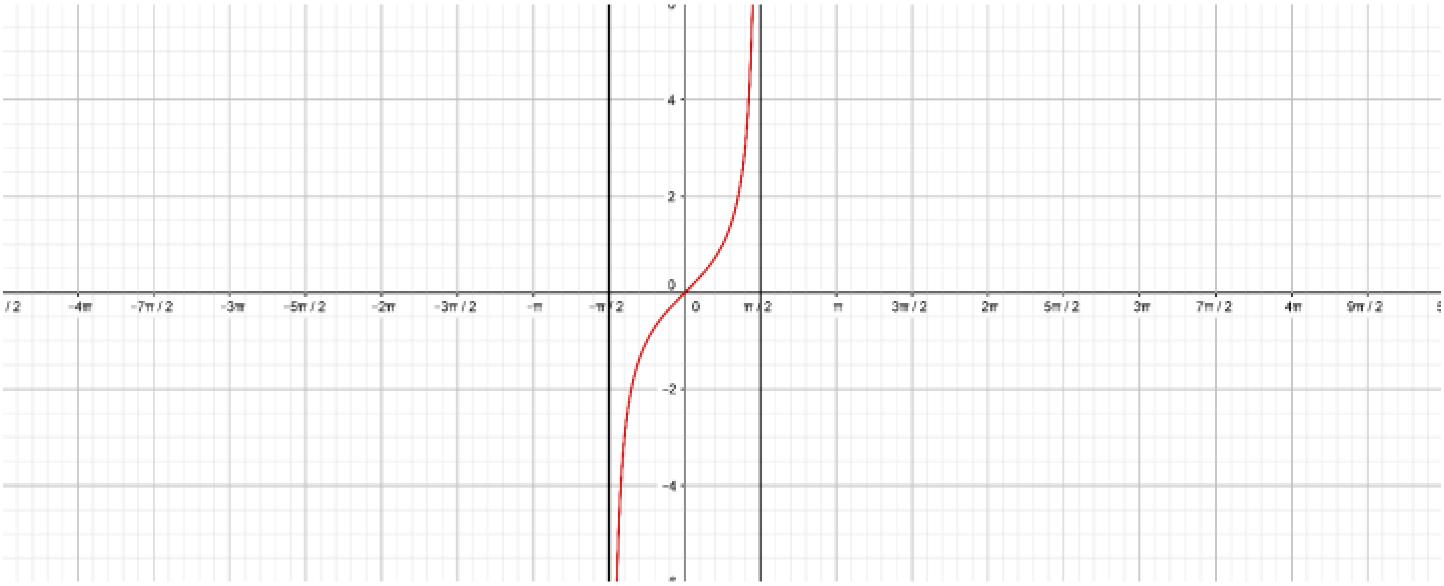
Soit f une fonction périodique de période p et dont l'ensemble de définition D_f. On pose :
$D_k = [a_0 + kT, a_0 + (k+1)T[\cap D_f$ où a_0 est un élément de D_f et C_k la courbe de la restriction de f sur D_k.
C_k est l'image de C_0 par la translation t_k de vecteur $\vec{u}_k \binom{kT}{0}$

Preuve : En exercice.

Remarque :

La courbe C_f est la réunion de toutes les courbes C_k où $k \in \mathbb{Z}$, $C_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} C_k$

Exercice :



La courbe ci-dessus est la courbe de la restriction de la fonction $\begin{array}{l} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)+1} \end{array}$ sur l'intervalle $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

On a montré que cette fonction est périodique de période π, continuer à tracer la courbe C_f sur $[-2\pi, 2\pi]$

IV) FONCTION MAJOREE, MINOREE, BORNEE

1) Activité

Activité 1 : Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

En utilisant la forme canonique du trinôme f, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq -1)$

Activité 2 :

Soit la fonction h définie par : $\begin{array}{l} h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{1+|x|} \end{array}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h et étudier sa parité.
2- Construire la courbe de la restriction de h sur $[0, +\infty[$, puis construire C_f
3-Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) < 1)$ et que $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) > -1)$
4- La fonction h admet-elle un maximum absolu ?

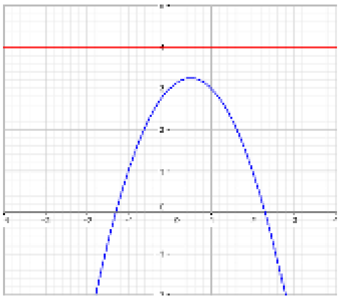
Définitions

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f, et D une partie de D_f.

- On dit que : f est **majorée** sur D si $(\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \leq M)$
- On dit que : f est **minorée** sur D si $(\exists m \in \mathbb{R})(\forall x \in D)(f(x) \geq m)$
- On dit que f est **bornée** sur D si elle est majorée et minorée sur D.

Remarque :

- Quand une fonction est majorée sur son ensemble de définition, on se contente de dire qu'elle est majorée.
- Un majorant M d'une fonction f sur D_f n'est pas nécessairement extremum absolu. Dans la courbe ci-contre 4 est un majorant de f mais pas un extremum absolu (Il n' y a pas de réel α qui vérifie que $f(\alpha) = 4$)



Exemple :

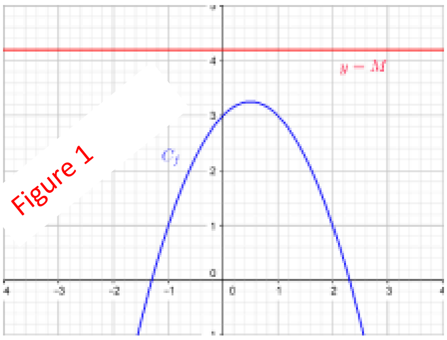
- La fonction h dans l'activité 2 est majorée par 1 et minorée par -1.
- La fonction f dans l'activité 1 est minorée.
  Montrer par absurde que f ne peut pas être majorée.

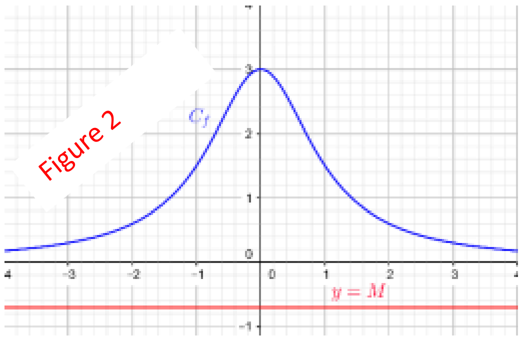
Propriété :

- Si f est une fonction majorée par M alors elle majorée par tout nombre M' tel que : $M' \geq M$.
- Si f est une fonction minorée par m alors elle majorée par tout nombre m' tel que : $m' \leq m$.

Interprétations géométriques :

- La courbe d'une fonction majorée par M est au-dessous de la droite $D: y = M$ (figure 1)
- La courbe d'une fonction minorée par m est au-dessus de la droite $D: y = m$ (figure 2)





Propriété :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f ; f est bornée si et seulement si : $(\exists \alpha \in \mathbb{R}^+)(\forall x \in D_f)(|f(x)| \leq \alpha)$

Preuve : (en exercice)

V) COMPARAISON DE DEUX FONCTIONS

1) Signe d'une fonction

Activité :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + x + 1$
Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \geq 0)$

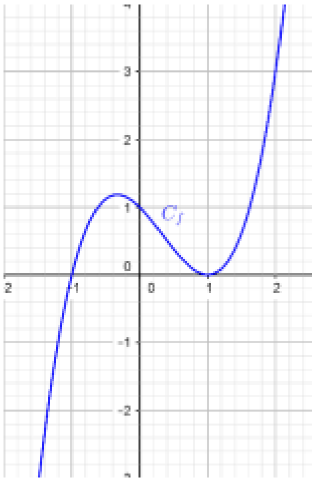
Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f, et D une partie de D_f.

- On dit que : f est positive sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq 0)$.
- On dit que : f est négative sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \leq 0)$.

Remarque :

- Si f est positive sur D_f on dit que f est positive et on écrit : $f \geq 0$
- Si f est négative sur D_f on dit que f est négative et on écrit : $f \leq 0$
- Une fonction positive est minorée par 0, par contre une fonction négative est majorée par 0.



Exemple :

Sur la courbe ci-contre la fonction f change de signe :
f est négative sur $]-\infty, -1]$ et positive sur $[-1, +\infty[$

Définition :

Soient f et g deux fonctions dont les domaines de définitions sont respectivement D_f et D_g et D une partie commune entre D_f et D_g $(D \subset D_f \cap D_g)$

On dit que f et plus grande que g sur D si $(\forall x \in D)(f(x) \geq g(x))$ et on écrit $f \geq g$ sur D

Interprétation géométrique :

Si $f \geq g$ sur D alors C_f est au-dessus de C_g

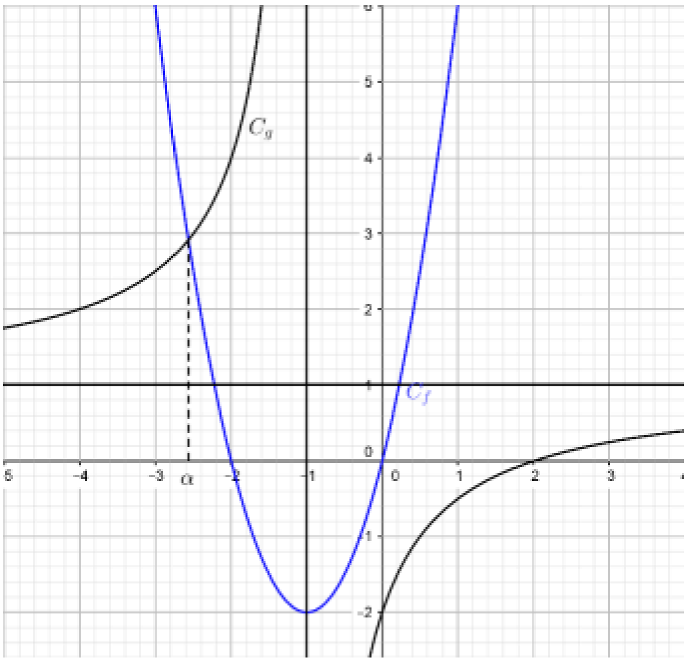
Exemple :

Sur la figure ci-contre C_f est la courbe de la fonction

$f(x) = 2x^2 + 4x$ et C_g est la courbe représentative de

la fonction $g(x) = \frac{x-2}{x+1}$

- Sur $[\alpha, -1[$ on a : $g \geq f$.
- Sur $]-\infty, \alpha] \cup]-1, +\infty[$ on a $f \geq g$



Exercice :

Considérons les fonctions $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = \frac{2x}{x-1}$

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$

2- Construire les courbes C_f et C_g

3- Nous définissons le réel $Sup(a, b)$ par : $Sup(a, b) = a \text{ si } a \geq b$.

Soit la fonction h définie par :

$h(x) = \sup(f(x), g(x))$

a) Donner une expression de h en fonction de x

b) Construire la courbe représentative de h.

VI) VARIATION D'UNE FONCTION ET EXTREMUMS

1) Activités et définition.

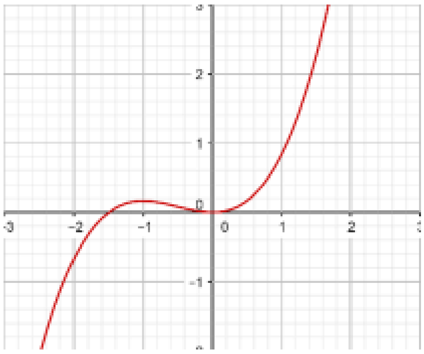
Activité1 :

A partir de la courbe ci-contre d'une fonction f,

1-Déterminer la monotonie de f sur les intervalles $]-\infty,-1]$; $[-1,0]$ et sur $[0,+\infty[$

2-Dresser le tableau de variations de la fonction f.

3-Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.



Activité 2 :

Soit la fonction
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x^2 + x - 2|$$

1- Ecrire des expressions de la fonction g sans la valeur absolue.

2- Etudier la monotonie de la fonction g

3- Dresser le tableau de variation de la fonction g.

4- Déterminer les extremums de la fonction f et leurs natures.

Activité 3 :

Soit la fonction
$$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 + 4x + 1$$

Montrer que la fonction h n'admet pas de maximum absolu.

Définitions :(Monotonie d'une fonction)

Soit f une fonction numérique à variable réelle dont l'ensemble de définition est D_f. I un intervalle de D_f.

- On dit que : f est **croissante** sur I si : $(\forall(a,b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b))$
- On dit que : f est **strictement croissante** sur I si : $(\forall(a,b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) < f(b))$
- On dit que : f est **décroissante** sur I si : $(\forall(a,b) \in I^2)(a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
- On dit que : f est **strictement décroissante** sur I si : $(\forall(a,b) \in I^2)(a < b \Rightarrow f(a) > f(b))$
- On dit que f est **monotone** sur l'intervalle I s'il est croissante ou bien décroissante sur I.
- On dit que f est **strictement monotone** sur l'intervalle I s'il est strictement croissante ou bien strictement décroissante sur I.

2) Taux de variation d'une fonction

2.1 Définition

Définition :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f. a et b deux éléments distincts de I ; le nombre $T_{(a,b)} = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle **le taux d'accroissement de la fonction f entre a et b.**

Théorème :

Soit f une fonction dont D_f est son ensemble de définition ; I un intervalle inclus dans D_f.

- la fonction f est **croissante sur I** si et seulement si $(\forall(a,b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \geq 0)$
- la fonction f est **décroissante sur I** si et seulement si $(\forall(a,b) \in I^2)(a \neq b \Rightarrow T_{(a,b)} \leq 0)$

Preuve : En exercice

Exercices :

1- Etudier la monotonie de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}$.
2- Etudier la monotonie de la fonction $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$

2.2 Monotonie et parité :

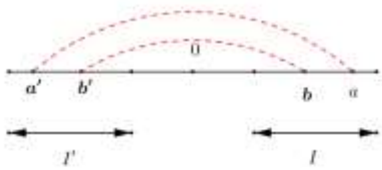
Propriété :

- Soit f une fonction **paire** dont le domaine de définition est D_f, I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
  - si f est croissante sur I alors elle est décroissante sur I'
  - si f est décroissante sur I alors elle est croissante sur I'
- Soit f une fonction **impaire** dont le domaine de définition est D_f, I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.
  - si f est croissante sur I alors elle est croissante sur I'
  - si f est décroissante sur I alors elle est décroissante sur I'

Preuve :

On suppose que f est paire : soit I un intervalle dans $D_f \cap \mathbb{R}^+$, et I' son symétrique par rapport à 0.

Soient a' et b' deux éléments de I' alors il existe a et b dans I tels que $a' = -a$ et $b' = -b$



$$T_{f_I'} = \frac{f(a')-f(b')}{a'-b'} = \frac{f(-a)-f(-b)}{(-a)-(-b)}$$

$$= \frac{f(a)-f(b)}{-(a-b)} \qquad \text{(car } f \text{ est paire)}$$

$$= -T_{f_I}$$

3) Extremums

3.1 Extremums absolues

Activité : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$; Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) \leq f(0))$

Définition :

Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un maximum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \leq f(\alpha))$. On écrit : $\max\limits_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$
- On dit que f admet un minimum absolu en α si : $(\forall x \in D_f)(f(x) \geq f(\alpha))$. On écrit : $\min\limits_{x \in D_f} f(x) = f(\alpha)$

Remarque :

Si f admet un maximum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un majorant de f.

Si f admet un minimum absolu en α alors $f(\alpha)$ est un minorant de f

3.2 Extremums relatifs

Activité : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$

1- Etudier la parité de la fonction g.
2- Etudier les variations de la fonction g sur $[0,1]$ et sur $[1,+\infty[$
3- Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Définition :

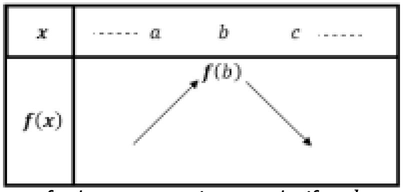
Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définitions est D_f

- On dit que f admet un **maximum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \leq f(\alpha))$.
- On dit que f admet un **minimum relatif** en α s'il existe un **intervalle ouvert inclus dans D_f** et qui contient α tel que : $(\forall x \in I)(f(x) \geq f(\alpha))$.

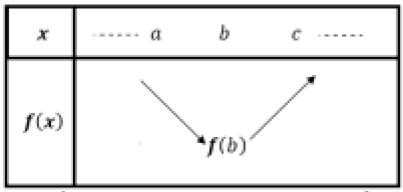
Propriété :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f , a , b et c trois éléments de D_f tels que $a < b < c$ et $[a, c] \subset D_f$

- Si f est croissante sur $[a, b]$ et décroissante sur $[b, c]$ alors f admet **un maximum relatif en b**
- Si f est décroissante sur $[a, b]$ et croissante sur $[b, c]$ alors f admet **un minimum relatif en b**



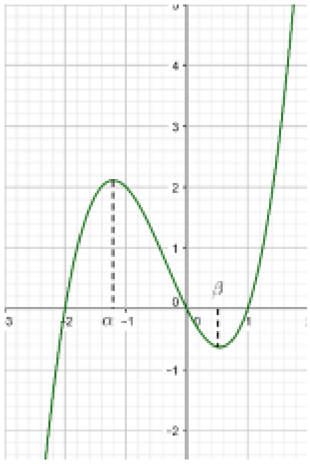
f admet un maximum relatif en b



f admet un minimum relatif en b

Interprétation géométrique :

Sur la figure ci-contre on a :
f admet un maximum relatif en α
et admet un minimum relatif en β



VII) ETUDE DES FONCTIONS USUELLES (RAPPELLES)

1) $f(x) = ax^2 + bx + c$

Propriété :

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme $(a \neq 0)$

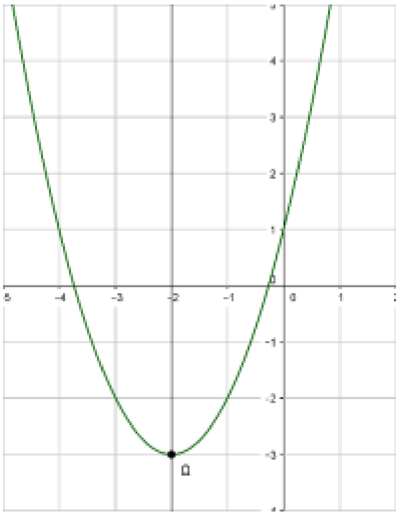
- En posant $\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$ et $\boldsymbol{\beta} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ on obtient pour tout réel x ; $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ c'est la forme canonique du trinôme $f(x)$.
- La courbe C_f est l'image de la courbe de la fonction $g(x) = ax^2$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$.
- La courbe C_f dans un repère orthogonal est **une parabole de sommet $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'axe la droite $(\Delta): x = \alpha$**

Les variations de f et sa représentation graphique peut être définies suivant le signe de a comme suite :

En posant $\boldsymbol{\alpha} = \frac{-b}{2a}$ et $\boldsymbol{\beta} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

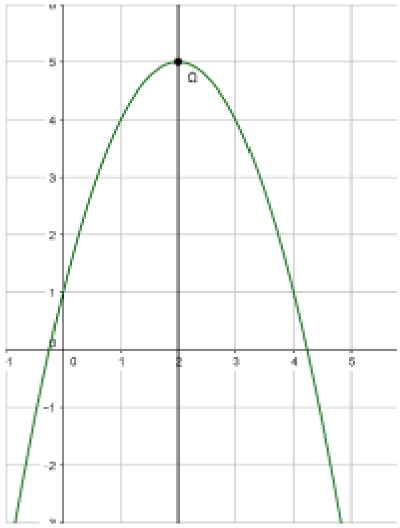
Si $a > 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗ $+\infty$



Si $a < 0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$



2) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

Propriété :

Soit f la fonction homographique définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{-d}{c}\}$ par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Ils existent trois réels α , β et γ tels que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

La courbe C_f est l'image de la courbe (Γ) représentative de la fonction $x \to \frac{\gamma}{x}$ par la translation t de vecteur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$. La courbe C_f dans un repère orthogonal est une hyperbole de centre $\Omega(\alpha, \beta)$ et d'asymptotes les droites $(\Delta): x = \frac{-d}{c}$ et $(\Delta'): y = \frac{a}{c}$.

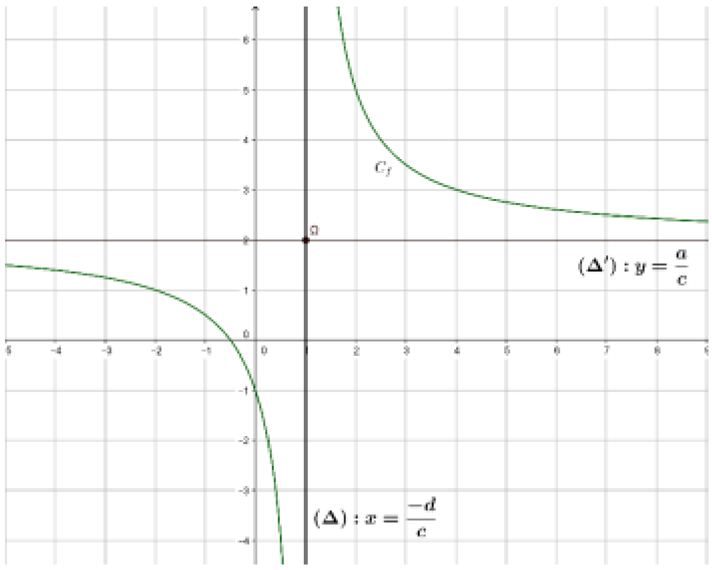
Pour les variations de f on envisage les deux cas suivants :

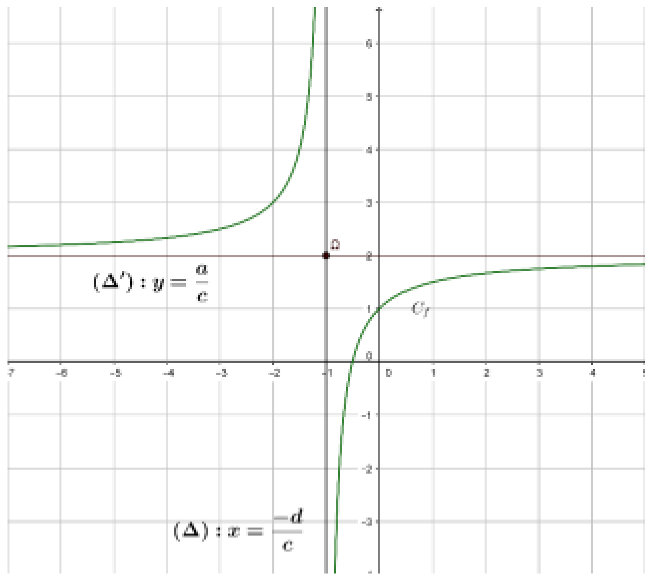
Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{a}{c}$

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-d}{c}$		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{a}{c}$	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$\frac{a}{c}$





3) $f(x) = \sqrt{ax + b}$

Activité :

Soit g la fonction définie par : $\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{ax+b} \end{aligned}$ où $a \neq 0$

1- Déterminer suivant les valeurs de a l'ensemble de définition de g.

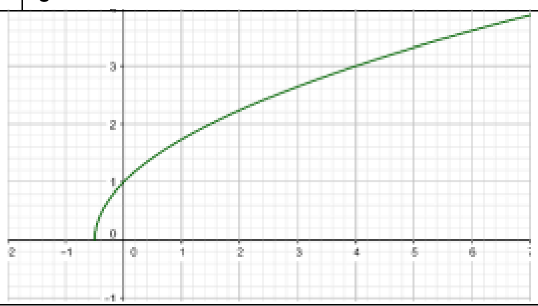
2- Déterminer le taux d'accroissement de la fonction g en deux réels x_1 et x_2 de D_g

3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de la fonction g.

Propriété :

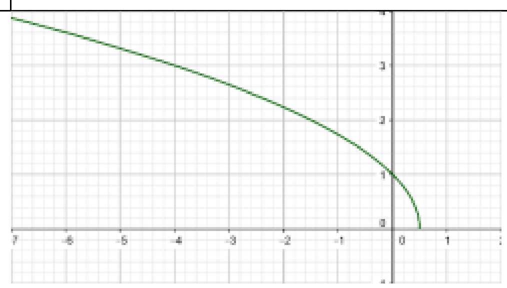
$a > 0$

x	$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



$a < 0$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$



4) $f(x) = ax^3$

Activité :

Soit h la fonction définie par : $\begin{aligned} h: \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^3 \end{aligned}$ où $a \neq 0$

1- Montrer que h est une fonction impaire.

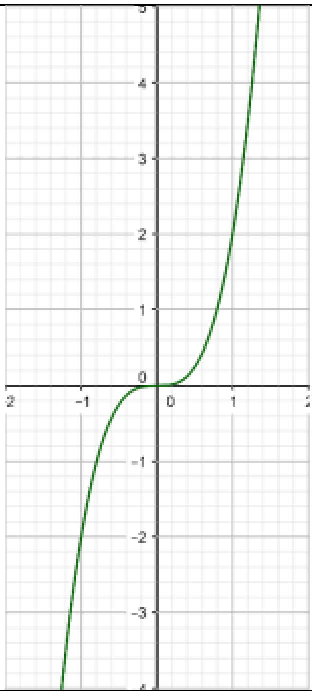
2- Montrer que le signe du taux d'accroissement de h sur $\mathbb{R}^+$ est le signe de a

3- Dresser suivant les valeurs de a le tableau de variation de h

Propriété :

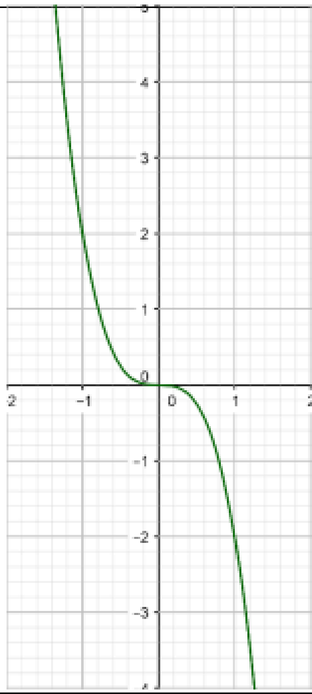
$a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$



$a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0 ↘	$-\infty$



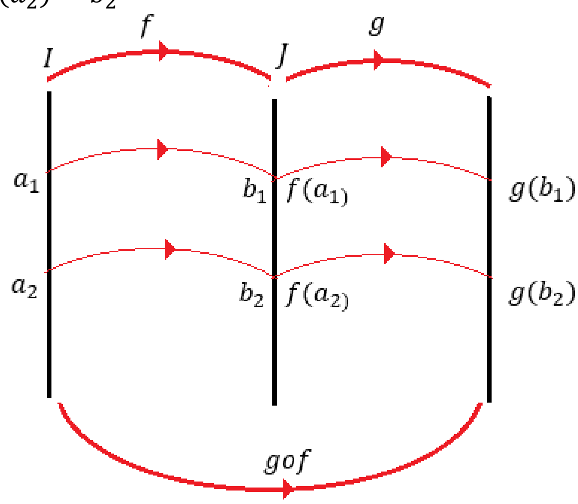
VIII) MONOTONIE DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTION.

Soient f et g deux fonctions dons les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I une intervalle de D_f et J un intervalles de D_g tels que : $f(I) = J$

Soient a_1 et a_2 deux éléments de I tels que : $f(a_1) = b_1$ et $f(a_2) = b_2$

On a :

$$\begin{aligned} T_{gof} &= \frac{(gof)(a_1)-(gof)(a_2)}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(f(a_1))-g(f(a_2))}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(b_1)-g(b_2)}{b_1-b_2} \times \frac{b_1-b_2}{a_1-a_2} \\ &= \frac{g(b_1)-g(b_2)}{b_1-b_2} \times \frac{f(a_1)-f(a_2)}{a_1-a_2} \\ &= T_g \times T_f \end{aligned}$$



Propriété :

Soient f et g deux fonctions dons les ensembles des définitions respectifs D_f et D_g ; I un intervalle de D_f et J un intervalles de D_g tels que $f(I) = J$

- Si f est **croissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **croissante** sur I.
- Si f est **décroissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **croissante** sur I.
- Si f est **croissante** sur I et g est **décroissante** sur $J = f(I)$ alors gof est **décroissante** sur I.
- Si f est **décroissante** sur I et g est **croissante** sur $J = f(I)$ alors gof est dé**croissante** sur I.

Exercice 1 :

Soient les fonctions : $\begin{array}{l} f:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{2x+1}{x+1} \end{array}$ et $\begin{array}{l} g:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{2x+1} \end{array}$ et $h = fog$

1- Exprimer $h(x)$ en fonction de x.

2- Déterminer D_h ensemble de définition de h.

3- Dresser les tableaux de variation de f et g.

4- En déduire les variations de h.

Exercice 2 :

Soit la fonction $\begin{array}{l} u:\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{array}$

1- Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(u(x) = (vot)(x))$ où $t(x) = -x^2 + 2x$ et $v(x) = x^2 + 2x + 3$

2- Dresser les tableaux de variation de v et t

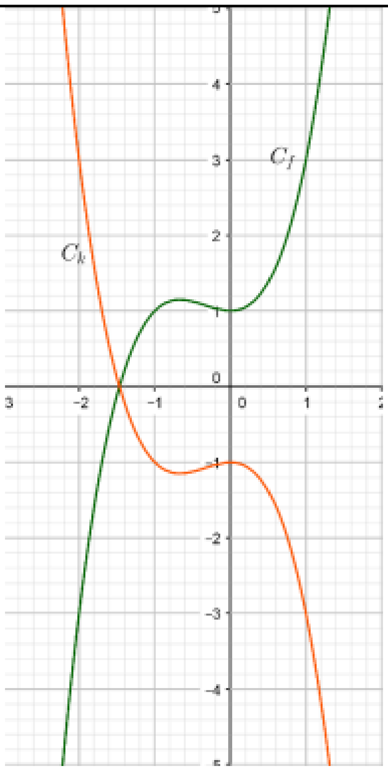
3- En déduire les variations de u.

IX) REMARQUES SUR LES GRAPHES.

1) Nombre de solution de l'équation $f(x) = k$

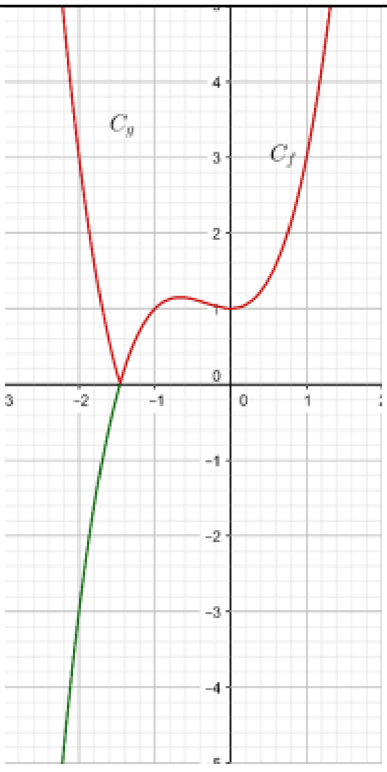
Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f . Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ est le nombre de points d'intersection de la courbe C_f avec la droite $(\Delta): y = k$.

Soit f une fonction numérique dont la courbe représentative C_f



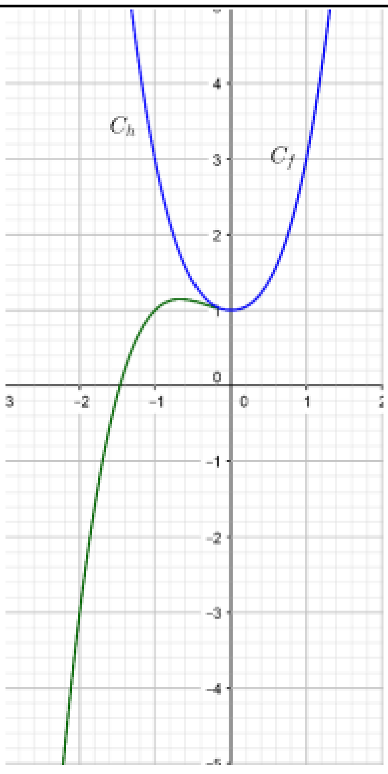
$k(x) = -f(x)$

C_k et C_f sont symétrique par rapport à l'axe (Ox)



$g(x) = |f(x)|$

- Si $f(x) \geq 0$ alors $g(x) = f(x)$ et dans ce cas C_g et C_f seront confondues.
- Si $f(x) \leq 0$ alors $g(x) = -f(x)$ et dans ce cas C_g et C_f seront symétriques par rapport à l'axe (Ox)



$h(x) = f(|x|)$

Si $x \geq 0$ alors

$h(x) = f(x)$ et dans ce cas C_h et C_f sont confondues.

La fonction h etant paire alors C_h est symétrique par rapport à l'axe (Oy)