PROF: ATMANI NAJIB

Ensembles Applications : Exercices

Exercice 1

Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Montrer :

1) $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$.
2) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$.
3) $\begin{cases} A \cap B \subset A \cap C \\ A \cup B \subset A \cup C \end{cases} \Longrightarrow B \subset C$.
4) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
5) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C = A - (B \cup C)$
6) $\bar{A} \triangle \bar{B} = A \triangle B$

Exercice 2

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathfrak{R}$ par : $z\mathfrak{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence.
2) Déterminer la classe d'équivalence de chaque z de $\mathbb{C}$.

Exercice 3

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathfrak{R}$ par : $x\mathfrak{R}y \Longleftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

1) Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'equivalence.
2) Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 4

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $P(E)$- $\emptyset$ la relation $\lhd$ par :$X \lhd Y \Longleftrightarrow (X = Y$ ou $\forall x \in X$, $\forall y \in Y \;\; x \leqslant y)$.

Vérifier que $\lhd$ est une relation d'ordre.

Exercice 5

Soient E,F et G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications ; on considère l'application $h : E \longrightarrow F \times G$ définie par : $\forall x \in E : h(x) = (f(x), g(x))$.

1) Montrer que si f et g sont injectives, alors h l'est aussi.
2) On suppose que f et g sont surjectives, h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 6

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que : $f = fofof$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 7

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que : $p = pop$.

Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = Id_E$.

Exercice 8

Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications telles que : $gofogof$ est surjective et $fogofog$ est injective.

Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 9

Soit X un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de X sur l'ensemble de ses parties $P(X)$.
• On pourra raisonner par l'absurde et considérer pour $f : X \longrightarrow P(X)$ l'ensemble $A = x \in X / x \notin f(x)$

Exercice 10

Soient X, Y deux ensembles et $f : X \longrightarrow Y$ une application.
1) Montrer que f est injective si et seulement si, pour tout $g : Z \longrightarrow X$ et tout $h : Z \longrightarrow X$, on a $fog = foh \Longrightarrow g = h$.
2) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour tout $g : Y \longrightarrow Z$ et tout $h : Y \longrightarrow Z$, on a $gof = hof \Longrightarrow g = h$.