Ensembles-Applications

Exercice 1 :

Soient $A = \{1,2,3\}$ et $B = \{0,1,2,3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \times B$.

Exercice 2 :

Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

Exercice 3 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$A_1 =]-\infty, 0];\ A_2 =]-\infty, 0[;\ A_3 =]0, +\infty[;\ \ A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1,2[; A_6 = [1,2[.$
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad et \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 4 :

Soient $A =]-\infty, 3]$, $B =]-2,7]$ et $C =]-5, +\infty[$ trois parties de $\mathbb{R}$.
Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $B \cap C$, $B \cup C$, $\mathbb{R} \setminus A$, $A \setminus B$, $(\mathbb{R} \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$, $(\mathbb{R} \setminus (A \cup B)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.

Exercice 5 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Exercice 6 :

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On suppose que :
$$A \cap B \neq \emptyset; A \cup B \neq E; A \not\subseteq B; B \not\subseteq A$$
On pose
$$A_1 = A \cap B; A_2 = A \cap C_E B; A_3 = B \cap C_E A; A_4 = C_E(A \cup B)$$

1. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont non vides.
2. Montrer que A_1, A_2, A_3 et A_4 sont deux à deux disjoints.
3. Montrer que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = E$.

Exercice 7 :

1. Déterminer le complémentaire dans $\mathbb{R}$ des parties suivantes :
$A_1 =]-\infty, 0];\ A_2 =]-\infty, 0[;\ A_3 =]0, +\infty[;\ \ A_4 = [0, +\infty[; A_5 =]1,2[; A_6 = [1,2[.$
2. Soient $A =]-\infty, 1[\cup]2, +\infty[$, $B =]-\infty, 1[$ et $C = [2, +\infty[$. Comparer les ensembles suivants :
$$C_{\mathbb{R}}A \qquad \text{et} \qquad C_{\mathbb{R}}B \cap C_{\mathbb{R}}C$$

Exercice 8 :

Justifier les énoncés suivants.

a) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A est inclus dans B, alors le complémentaire de B dans E est inclus dans le complémentaire de A dans E.

b) Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. Si A et B sont disjoints, alors tout élément de E est soit dans C_E^A soit dans C_E^B.

c) Soient E un ensemble, A un sous-ensemble de E. Déterminer les ensembles suivants :
$C_E(C_E A)$; $A \cap C_E A$; $A \cup C_E A$; $C_E \emptyset$; $C_E E$

Exercice 9 :

1. Montrer que $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
2. Montrer que $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$

Exercice 10 :

On rappelle que l'on note

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Montrer que

$$(A \cap B) \cap \left(\overline{A \cap C}\right) = A \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cap C) \cap \left(\overline{A \cap B}\right) = A \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cap B) \Delta (A \cap C) = A \cap (B \Delta C)$$

Exercice 11 :

On rappelle que pour toutes parties U et V d'un ensemble E, on note

$$U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$$

1. Montrer que pour toutes parties A, B et C d'un ensemble E.

$$(A \cup B) \cap \left(\overline{A \cup C}\right) = \overline{A} \cap B \cap \overline{C}$$
$$(A \cup C) \cap \left(\overline{A \cup B}\right) = \overline{A} \cap C \cap \overline{B}$$

2. En déduire que

$$(A \cup B) \Delta (A \cup C) = \overline{A} \cap (B \Delta C)$$

Exercice 12 :

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1. Que pensez-vous de l'implication

$$A \cup B \not\subseteq C \Rightarrow (A \not\subseteq C \text{ ou } B \not\subseteq C) \text{ ?}$$

Justifiez (on pourra utiliser la contraposée).

2. On suppose que l'on a les inclusions suivantes : $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.
3.

Exercice 13 :

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Démontrer les égalités suivantes :

1. $C_E(A \cap B) = C_E A \cup C_E B$

2. $C_E(A \cup B) = C_E A \cap C_E B$
   Si $A \subset B$, montrer $C_E B \subset C_E A$

Exercice 14 :

Soit E un ensemble et F et G deux parties de E. Démontrer que :

1. $F \subset G \Leftrightarrow F \cup G = G$
2. $F \subset G \Leftrightarrow F \cap C_E G = \emptyset$

Exercice 15 :

Soit E un ensemble et soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour A et B dans $\mathcal{P}(E)$, on appelle différence symétrique de A par B l'ensemble, noté $A\Delta B$ défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

1. Montrer que $A\Delta B = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta E$.
3. Montrer que pour tous A, B et C dans $\mathcal{P}(E)$, on a :
   a) Montrer que : $\overline{\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)} = \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (B \cap A)$
   b) Montrer que : $(A\Delta B)\Delta C = \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (C \cap B \cap A)$
   c) Montrer que $A\Delta(B\Delta C) = (C\Delta B)\Delta A$
   d) A l'aide du b), montrer que $(A\Delta B)\Delta C = (C\Delta B)\Delta A$,
   e) En déduire que : $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$

Exercice 16 :

Soit $f : I \to J$ définie par $f(x) = x^2$

1. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective mais pas surjective.
2. Donner des ensembles I et J tels que f soit surjective mais pas injective.
3. Donner des ensembles I et J tels que f soit ni injective ni surjective.
4. Donner des ensembles I et J tels que f soit injective et surjective.

Exercice 17 :

Dire (en justifiant) pour chacune des applications suivantes si elles sont injectives, surjectives, bijectives :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 \qquad f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ x \mapsto x^2 \qquad f : [0,1] \to [0,2],\ x \mapsto x^2$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^3 \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + x^3 \qquad k : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x + x^4$$

Exercice 18 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$, deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \to J$ une fonction strictement croissante.

1. Montrer que f est injective.

On pourra montrer la contraposée (et on rappelle que $x_1 \neq x_2$ équivaut à $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$)

2. Déterminer l'ensemble K tel que $f : I \to K$ soit bijective.

Exercice 19 :

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ par $f(n, m) = mn$

Soit $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $g(n) = (n, (n+1)^2)$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. g est-elle injective ?
4. g est-elle surjective ?

Exercice 20 :

Soient

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \qquad g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$n \mapsto 2n \qquad n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$$

Où $E(x)$ désigne la partie entière de x

Les fonctions sont-elles injectives, surjective ? Comparer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 21 :

Soit f une application de E vers E telle que :

$$f\big(f(E)\big) = E$$

Montrer que f est surjective.

Exercice 22 :

On considère l'application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n^2$

1. Existe-t-il $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$f \circ g = Id_{\mathbb{N}}$?
2. Existe-t-il $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :$h \circ f = Id_{\mathbb{N}}$?

Exercice 23 :

Soit $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 2n$

1. Existe-t-il une fonction $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $f \circ g = Id_{\mathbb{Z}}$?
2. Existe-t-il une fonction $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que $h \circ f = Id_{\mathbb{Z}}$?

Exercice 24 :

Soit $f: E \to F$ une application, où $Card(E) = Card(F)$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est bijective

Exercice 25 :

Répondre aux questions qui suivent, en justifiant, le cas échéant, votre réponse par un bref argument, un calcul ou un contre-exemple.

1. Si les applications $u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $v: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ sont bijectives, alors l'application $u \circ v \circ u: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ est aussi bijective. Vrai ou Faux, justifier.
2. L'application $f: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}: (a, b, c) \mapsto 2^a 3^b 5^c$ est une application

(i) bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. L'application $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à l'entier $l \in \mathbb{Z}$ associe le reste de la division euclidienne de l par n est une application.
4. bijective (ii) injective et pas surjective (iii) surjective et pas injective (iv) ni surjective ni injective

Justifier.

5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $ad - bc = 1$. Déterminer l'application réciproque de la bijection

$$f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$$
$$(u, v) \mapsto (au + bv + 1, cu + dv - 1)$$

Exercice 26 :

1. Soient $q_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

Montrer que :

$$-\frac{1}{2} < \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} < \frac{1}{2}$$

2. Soit $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{Q}$ l'application définie par :

$$f(p, q) = p + \frac{1}{q}$$

   a. Montrer que f est injective ?
   b. f est-elle surjective ?

Exercice 27 :

Soit $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $f: E \to \mathcal{P}(E)$.
Considérer la partie $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Exercice 28 :

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on désigne par I_n l'ensemble $\{1,2, \dots, n\}$.

1. On suppose $n \geq 2$. Combien y-a-t-il d'application injectives $f: I_2 \to I_n$?
2. A quelle condition portant sur les entiers m et n peut-on définir une application $f: I_m \to I_n$ qui soit injective, surjective, bijective ?

Exercice 29 :

Soient E, F et G trois ensemble et soient $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.
2. Montrer que si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
3. Que peut-on conclure sur $g \circ f$ si f et g sont bijectives ?
4. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.
5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
6. Si à présent $f: E \to F$ et $g: F \to E$, déduire de ce qui précède ce que l'on peut dire dans les cas suivants :
   a. $g \circ f = Id_E$
   b. $f \circ g = Id_F$

c. $f \circ f = Id_E$

Exercice 30 :

Soient X et Y deux ensembles non vides et f une application de X dans Y. Une application s, de Y dans X, telle que $f \circ s = Id_Y$ s'appelle une section de f.

1. Montrer que si f admet au moins une section alors f est surjective.
2. Montrer que toute section de f est injective.

Une application r, de Y dans X, telle que $r \circ f = Id_X$ s'appelle une rétraction de f.

3. Montrer que si f possède une rétraction alors f est injective.
4. Montrer que si f est injective alors f possède une rétraction.
5. Montrer que toute rétraction de f est surjective.
6. En déduire que si f possède à la fois une section s et une rétraction r, alors f est bijective et l'on a : $r = s (= f^{-1}$ par conséquent).

Exercice 31 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A et B deux parties de E, montrer que :

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

   Donner un exemple où cette dernière inclusion est stricte. Montrer alors que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E et pour toute partie B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 32 :

1. Soit f l'application de l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ dans lui-même définie par :
   $$f(1) = 4,\ \ f(2) = 1\ \ , f(3) = 2,\ \ f(4) = 2.$$
   Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{2\}$, $A = \{1,2\}$, $A = \{3\}$.
2. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(A)$ lorsque $A = \{1\}$, $A = [1,2]$.

Exercice 33 :

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x$. Déterminer $f([0,1] \times [0,1])$, $f^{-1}([-1,1])$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ définie par $f(x) = \cos(\pi x)$, déterminer $f(\mathbb{N})$, $f(2\mathbb{N})$, $f^{-1}(\{\pm 1\})$.

Exercice 34 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Soient A' et B' deux parties quelconques de F, non vides. Montrer que :

1. $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Exercice 35 :

Soient E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F .

1. Montrer que pour toute partie A de E, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

2. Montrer que pour toute partie B de F, on a $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$.
3. Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E on a $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
4. Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F on a $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.

Exercice 36 :

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -y \leq x \leq y\}$

Soit $f: D \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$

1. Représenter D dans le plan.
2. a. Montrer que si deux couples de réels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) vérifient

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\ x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \end{cases}$$

Alors $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ (autrement dit $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$).

b. Montrer que f est injective, on pourra se ramener au système du 2.a..

3. Est-ce que f est surjective ?